INSTRUMENTOS Y TÉCNICAS DE CÁLCULO

XVIII CEAM Granada. 2023

José Muñoz
Antonio Ledesma
Juan Antonio Hans
Antonio Fernández-Aliseda

Taller: *Instrumentos y técnicas de cálculo*. XVIII CEAM Granada.

GUION

01 Introducción

Queremos:

- Utilizar la historia de las matemáticas para contrastar las situaciones sociales de otros tiempos y culturas con las actuales.
- Reconocer y valorar los instrumentos y técnicas de cálculo como manifestaciones del patrimonio cultural de los diferentes pueblos para hacer más fáciles los cálculos, que suponían en su momento un grave problema práctico -sobre todo en astronomía y comercio-.
- Mostrar el manejo y el fundamento matemático de técnicas de cálculo e instrumentos antiguos y usarlos como fuente de aprendizaje.
- Despertar la curiosidad y popularizar las Matemáticas.

02 Neper

John Napier o Neper (1550-1617), matemático escocés, realizó dos grandes contribuciones al cálculo: el descubrimiento de los logaritmos y la construcción de instrumentos para realizar operaciones aritméticas.

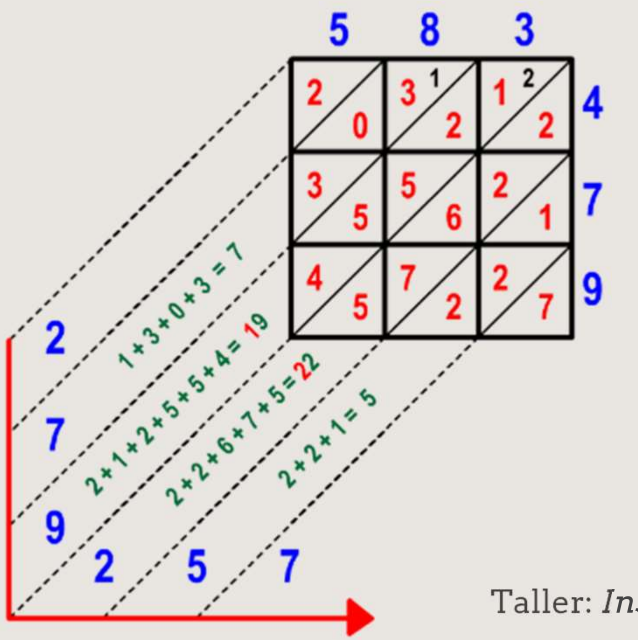
Escribió el libro *Rabdologiae*, publicado en 1617, donde se exponen tres dispositivos para ayudar en los cálculos aritméticos:

- las *virgulae* (llamadas posteriormente **Tablillas o Varillas de Neper**);
- el *multiplicationes promptuario* (**Regletas del prontuario**);
- y el *scacchiae abaco* (**Ábaco del tablero de ajedrez**).

02 Multiplicación por celosía

El procedimiento para multiplicar “por celosía” o “método hindú” -en la India se usaba desde, al menos, el siglo XII- pasó a Europa, a través de Italia, durante los siglos XIV y XV.

Por ejemplo,
583 x 479 = 279257



Taller: *Instrumentos y técnicas de cálculo.* XVIII CEAM Granada.

02 Tablillas de Neper (I)

Neper inventó unas tablas en forma de varillas o regletas que servían para calcular productos, divisiones y raíces cuadradas. Con este método, los productos se reducen a operaciones de sumas y los cocientes a restas.

El procedimiento para multiplicar con las varillas utiliza el método “por celosía”.

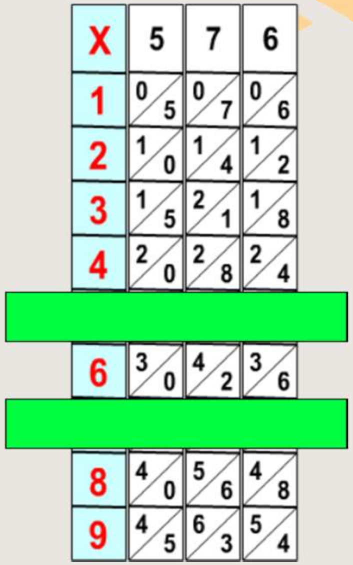
02 Tablillas de Neper (II a)

Multiplicación por un número de una cifra.
Ejemplo, **576 x 6**.

Se seleccionan las regletas del 5, del 7 y del 6 (por el multiplicando) y se acota la fila correspondiente al multiplicador 6 (entre las barras verdes en la imagen); se multiplica por celosía y se obtiene como resultado el valor 3456.

El uso de las tablillas es muy sencillo (basta con saber sumar), pero tiene un inconveniente: solo se puede multiplicar directamente cuando uno de los factores tiene una única cifra.

Simulador

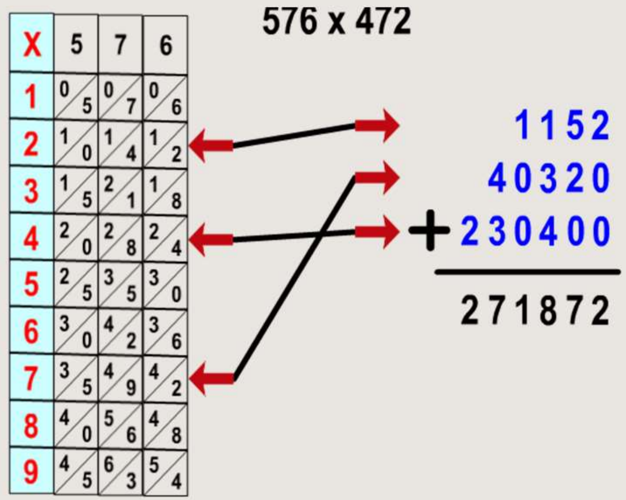


02 Tablillas de Neper (II b)

Multiplicación por un número de varias cifras. Ejemplo, **576 x 472**.

Se seleccionan las regletas del 5, del 7 y del 6 (por el multiplicando) y, dentro de ellas, se escogen las filas correspondientes a los dígitos del multiplicador (de unidades a centenas) 2, 7 y 4; se trasladan al papel los productos parciales (como en el algoritmo tradicional, primero el del 2, después el del 7 y, por último, el del 4) y se suman, obteniéndose como resultado 271872.

Simulador



Taller: *Instrumentos y técnicas de cálculo*. XVIII CEAM Granada.

02 Tablillas de Neper (III a)

División entre un número de una cifra. Ejemplo, **42713 : 8**.

El algoritmo es similar al de las divisiones de lápiz y papel. Al ser la primera cifra del dividendo (4) menor que la del divisor, se toman dos cifras en el dividendo (42). Se coge la regleta del divisor (8) y se busca la fila menor y más próxima a 42, en nuestro caso 40, asociada al 5: ese es el primer cociente. Se resta de 42 y tenemos el primer resto parcial (2). (…)

X	8
1	0/8
2	1/6
3	2/4
4	3/2
5	4/0
6	4/8
7	5/6
8	6/4
9	7/2

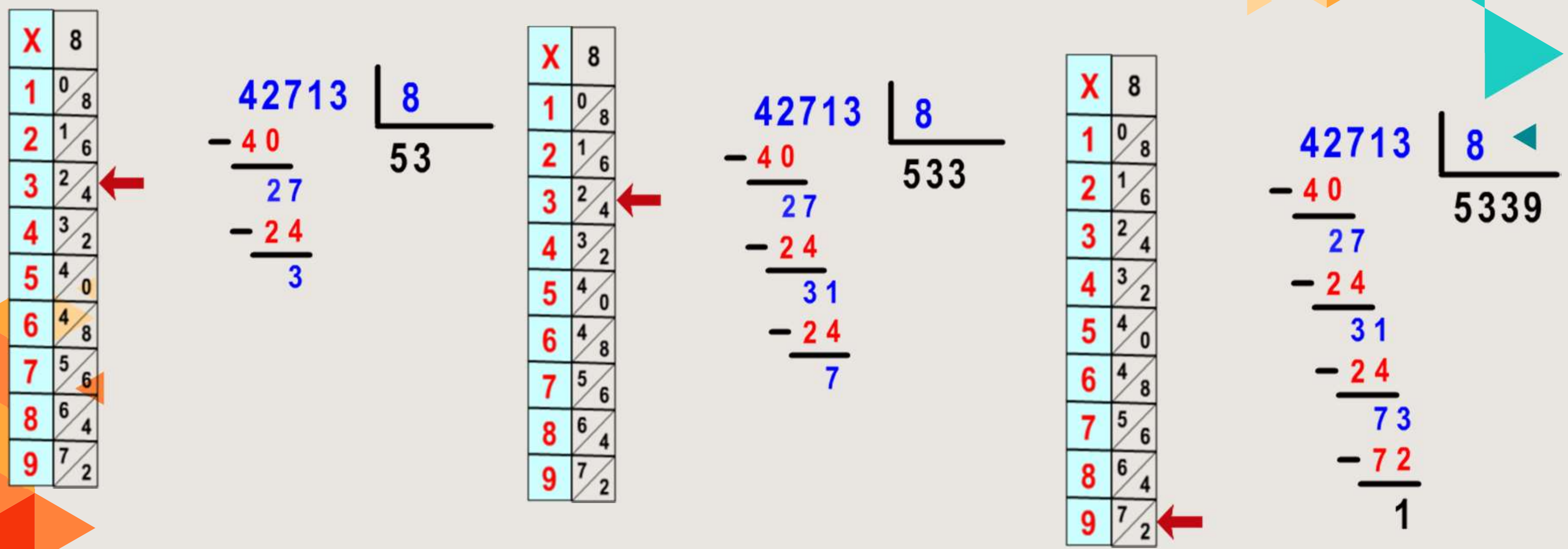
Simulador

```
 42713 | 8
-40    |____
 --      5
  2
```

02 Tablillas de Neper (III b)

División 42713 : 8.

(…) Bajando la siguiente cifra del dividendo tenemos que hay que dividir 27 y, repitiendo el proceso, se obtiene:



Taller: *Instrumentos y técnicas de cálculo*. XVIII CEAM Granada.

02 Tablillas de Neper (III c)

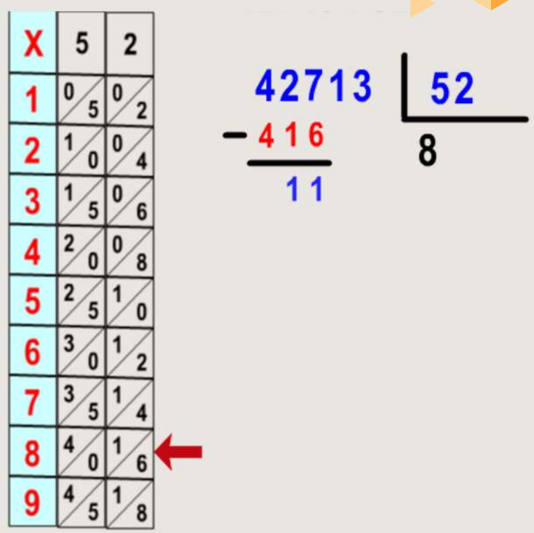
División entre un número de varias cifras. Ejemplo, **42712 : 52**.

Al formar las dos primeras cifras del dividendo (42) un número menor que el divisor (52), se toman tres cifras en el dividendo (427).

Se cogen las regletas del divisor (5 y 2) y se busca la fila menor y más próxima a 427, en nuestro caso 416, asociada al 8: ese es el primer cociente.

Al restar de 427 tenemos el primer resto parcial (11). (…)

[Simulador]

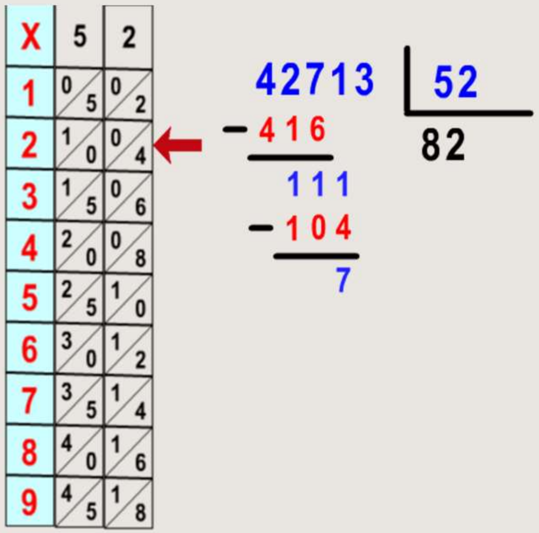


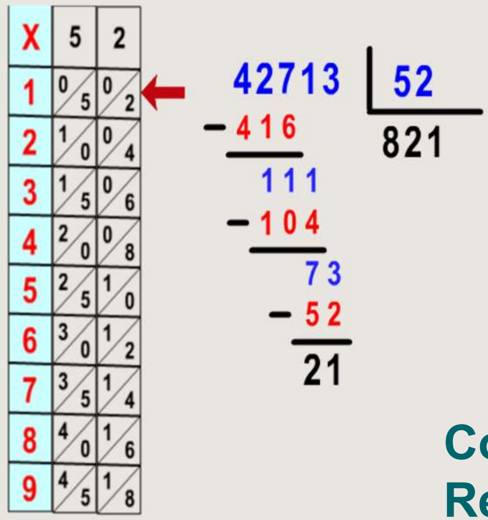
Taller: *Instrumentos y técnicas de cálculo*. XVIII CEAM Granada.

02 Tablillas de Neper (III d)

División 42712 : 52.

(…) Bajando la siguiente cifra del dividendo (1) y repitiendo el proceso se obtiene:





Cociente: 821
Resto: 21

02 Tablillas de Neper (IV a)

Extracción de raíces cuadradas.

Ejemplo, $\sqrt{870916}$.

Necesitamos añadir una tablilla especial (x^2) donde aparecen los cuadrados de los números del 1 al 9.

Agrupamos las cifras del radicando de dos en dos, partiendo desde las unidades.

Comenzamos por el bloque más a la izquierda, en este caso 87, y buscamos qué cuadrado perfecto es inmediatamente inferior a ese valor. En nuestro caso sería el 81. Por tanto la primera cifra de la raíz es 9, pues $9^2 = 81$.

Restamos y tenemos el primer resto parcial (6).

$$\underbrace{87}\,\underbrace{09}\,\underbrace{16}$$

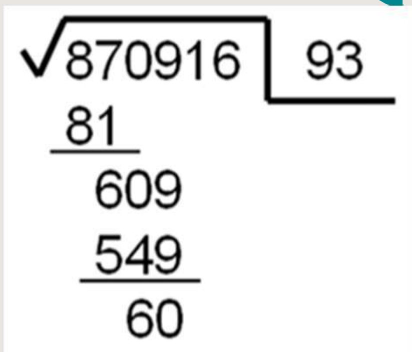
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{870916} & 9 \\ \hline \underline{81} & \\ \;\;6 & \end{array}$$

Simulador

02 Tablillas de Neper (IV b)

Extracción de raíces cuadradas: $\sqrt{870916}$

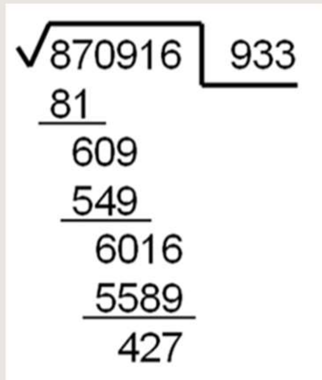
Al resultado de la resta (6) se le añade el siguiente bloque (09), obteniéndose 609. Para hallar el siguiente dígito de la raíz cuadrada, junto a la tablilla índice (la de x, a la izquierda) se colocan las del doble del valor encontrado para la raíz (18) y a su derecha la tablilla de x².
Basta buscar por qué cifra hay que multiplicar para obtener el valor inferior más cercano a 609, que en nuestro caso es 549, asociado al 3.



02 Tablillas de Neper (IV c)

Extracción de raíces cuadradas: $\sqrt{870916}$

Se vuelve a restar (obteniéndose 60) y se le añade el siguiente bloque (16), completando 6016. Volvemos a repetir el procedimiento con las varillas de x, de 1, 8 y 6 (correspondientes al doble de 93) y x^2 siendo ahora 5589 (asociado al 3) el valor más próximo a 6016, por lo que la raíz es 933 y el resto 427.

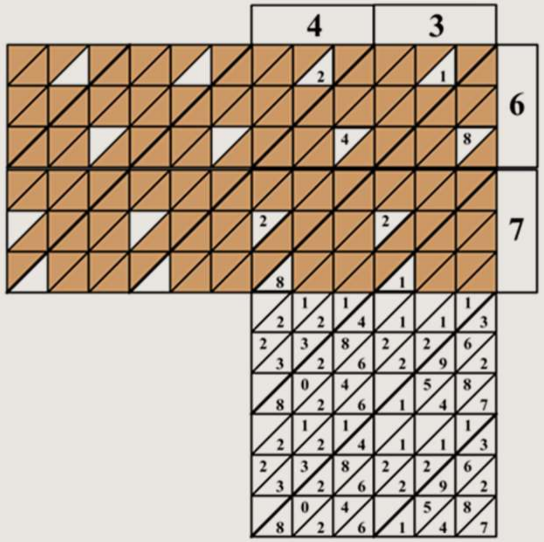


03 Regletas del prontuario de Neper (I a)

Estas regletas permiten realizar mecánicamente la multiplicación de dos números de varias cifras.

El juego de regletas está formado por 10 regletas numéricas, que se colocan de forma vertical (en blanco en la figura) y 10 regletas lectoras, con perforaciones, que se disponen en horizontal sobre las numéricas (en ocre).

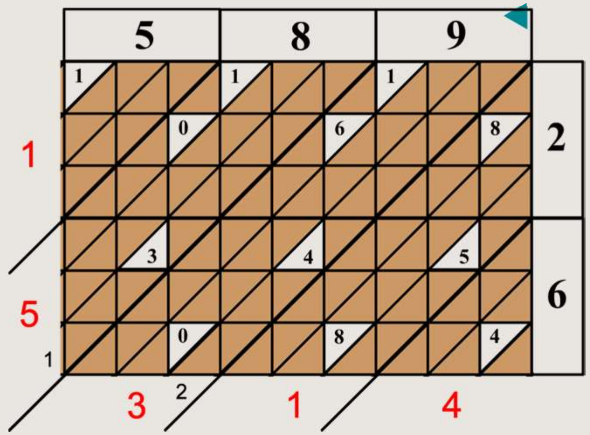
Todas las regletas se componen de módulos matriciales de tamaño 3x3 que se repiten varias veces. El número de repeticiones condiciona el máximo de dígitos que pueden tener los factores.



03 Regletas del prontuario de Neper (I b)

Ejemplo: 589 x 26. Se superponen perpendicularmente las regletas horizontales perforadas (las del multiplicador; en nuestro caso 26) sobre las verticales (las del multiplicando, 589).

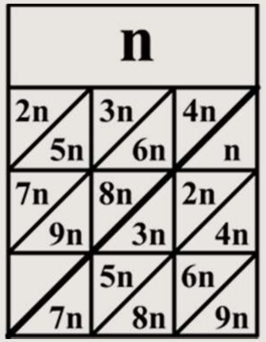
Simulador



El resultado del producto 589 x 26 se refleja a través de las ventanas triangulares, leídas diagonal a diagonal y se consigue el método árabe de la multiplicación sumando los valores visibles.

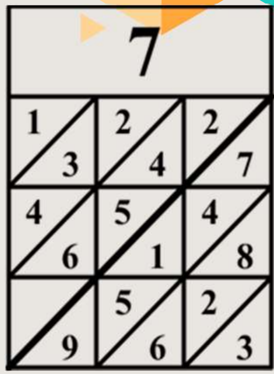
$$\boxed{589 \times 26 = 15314}$$

05 Regletas del prontuario de Neper. Construcción (I c)



Módulo base (3x3) para las regletas verticales

Las regletas verticales se obtienen dando a n, en el módulo base (imagen izquierda), los valores de 0 a 9, por lo que contiene todos los productos *m·n* de los diez posibles (0·*n* va en blanco). La matriz se divide, con una marca gruesa, por la diagonal secundaria, en dos partes: en el triángulo superior se colocan las decenas y en el inferior las unidades.

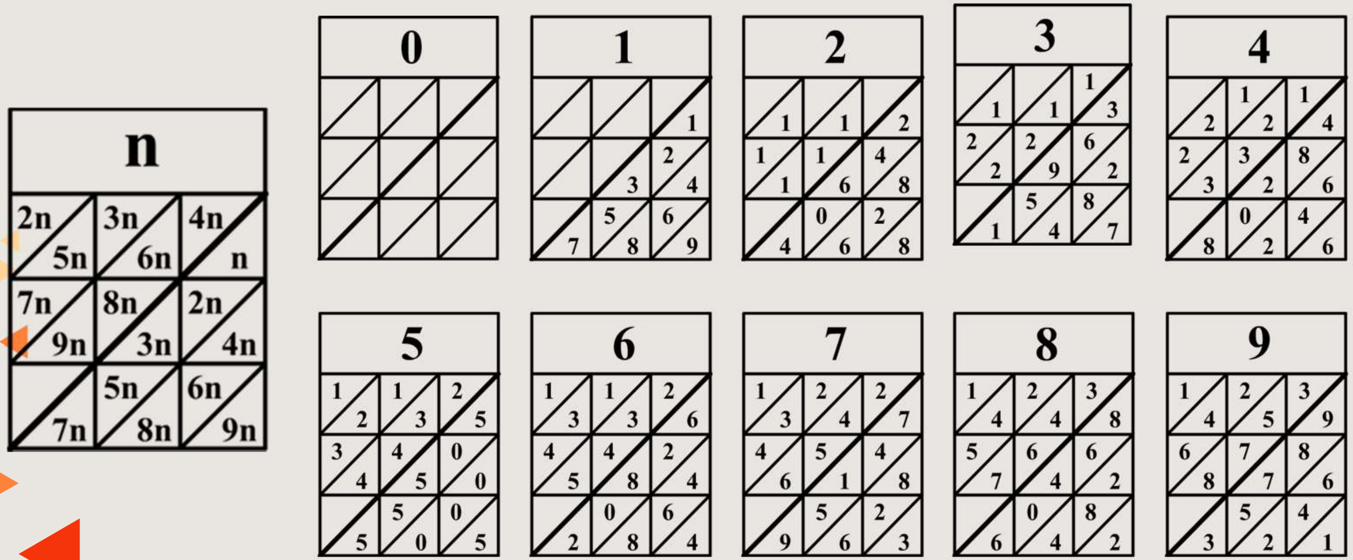


Módulo 7

Por ejemplo, 2·7, cuyo resultado es 14, se disgrega situando las unidades (4) en la segunda fila, tercera columna (donde aparece 2n) y las decenas (1) en la primera fila, primera columna (donde también aparece 2n).

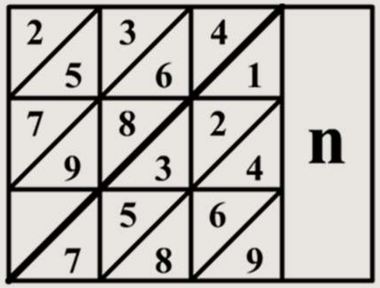
03 Regletas del prontuario de Neper. Construcción (I d)

El módulo base del 0 estaría formado solo por ceros, pero para simplificar se deja totalmente en blanco.
Resultan los siguientes **módulos base verticales**:



03 Regletas del prontuario de Neper. Construcción (I e)

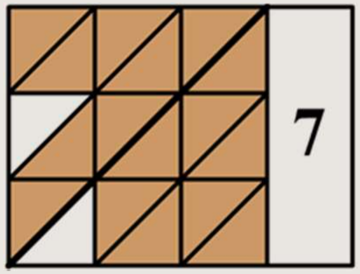
Los **módulos bases horizontales** tienen la siguiente estructura:



Módulo base para las regletas horizontales

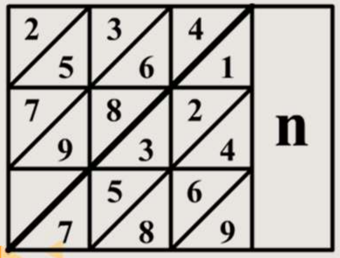
Las perforaciones de los módulos horizontales se realizan, en el módulo base, en los triangulitos donde aparezca ese valor. En nuestro ejemplo, para obtener el módulo horizontal del 7, se agujerean la parte superior de la segunda fila, primera columna y la parte inferior de la tercera fila, primera columna; lugares donde aparece el dígito 7.

Módulo del 7

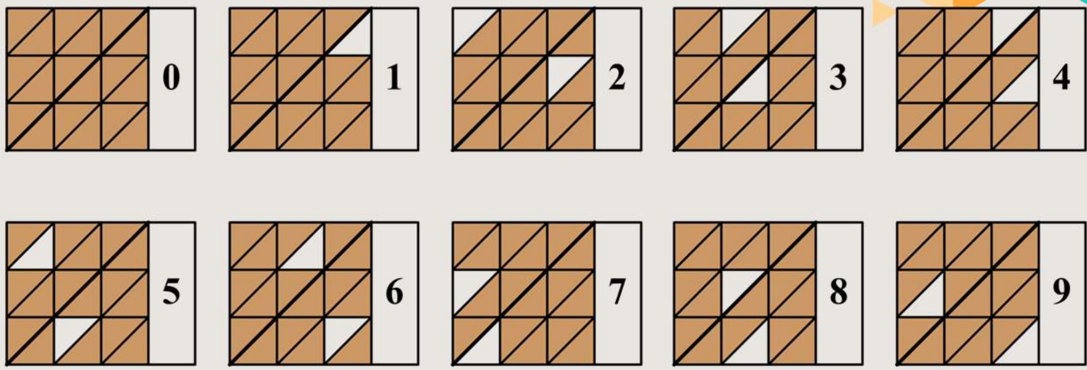


03 Regletas del prontuario de Neper. Construcción (I f)

De esta forma, los **módulos bases horizontales** que se obtienen son:



Módulo base para las regletas horizontales



Si las regletas se construyen con el mismo módulo repetido *n* veces, entonces el máximo de cifras de los números que podremos multiplicar con ellas será *n*.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (I a)

El ábaco de tablero de ajedrez permite sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas. Se basa en la aritmética binaria no posicional, reduciendo a la mitad y duplicando.

16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128		2^7	128
8192	4096	2048	1024	512	256	128	64		2^6	64
4096	2048	1024	512	256	128	64	32		2^5	32
2048	1024	512	256	128	64	32	16		2^4	16
1024	512	256	128	64	32	16	8		2^3	8
512	256	128	64	32	16	8	4		2^2	4
256	128	64	32	16	8	4	2		2^1	2
128	64	32	16	8	4	2	1		2^0	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0			
128	64	32	16	8	4	2	1			

El tablero básico es de tamaño 8x8, con el añadido de dos espacios externos, uno inferior y otro a la derecha, auxiliares, que no se consideran ni fila ni columna. En el exterior a la cuadrícula están las potencias de 2 y sus valores decimales.

Multiplicando los valores de la fila y la columna numérica exteriores se obtienen los de las casillas interiores.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (I b)

Para usar el tablero necesitamos fichas que actúen como contadores.

Colocación en el tablero:

Una ficha en un cuadrado intersección de una fila y una columna es el producto de los dos valores exteriores. Por ejemplo, 256 = 256 · 1 = 128 · 2 = … = 16 · 16 = …

Escritura de números:

Los números con los que operar estarán en base decimal, por lo que se deben transformar a sumas de potencias de 2 y, después, colocar fichas en las celdas correspondientes. Por ejemplo, 234 = 128 + 64 + 32 + 8 + 4

Para ello utilizaremos la siguiente tabla:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

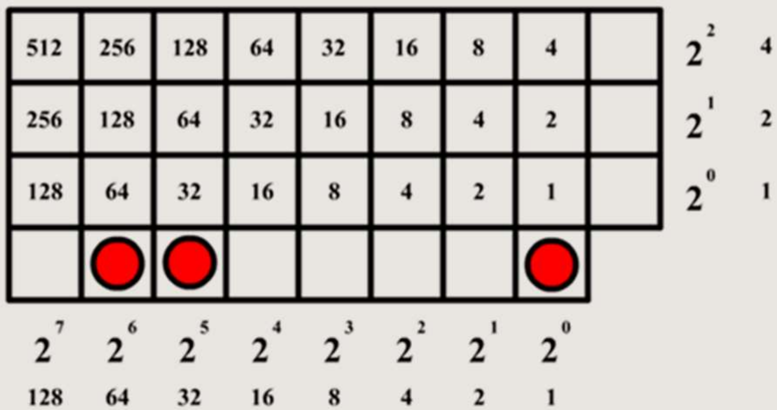
04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (I c)

Ejemplo: Representar en el tablero el número 97. Simulador

En primer lugar, descomponemos 97 como suma de potencias de 2.

$$97 = 64 + 32 + 1$$

Y, después, colocaremos las fichas en los espacios correspondientes.



04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (I d)

Movimientos de las fichas. Reglas:

Movimiento 1. En diagonal hacia arriba y hacia la izquierda: se multiplica por cuatro con cada cuadrado recorrido. Por tanto, cuatro fichas en una casilla del interior del tablero, por ejemplo, en la diagonal del 8, se transforman en una ficha en la casilla 32.

M 2. En diagonal hacia abajo y hacia la derecha: se divide por cuatro, con cada cuadrado movido. Por ello, una ficha en la casilla 128, por ejemplo, se convierte en cuatro de la casilla 32.

M 3. En diagonal a lo largo de una línea de equivalencia (la que se forma con valores idénticos): obviamente no cambia el valor con cada cuadrado recorrido. Por tanto, una ficha se puede colocar en cualquiera de las casillas con ese mismo valor.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (I e)

Movimientos de las fichas. Reglas:

M4. Horizontal hacia la izquierda: se multiplica por dos con cada cuadrado desplazado. Por ejemplo, dos fichas en una casilla de la columna 2^2 equivalen a una ficha en la casilla de su izquierda (2^3).
M5. Horizontalmente a la derecha: se divide entre dos con cada cuadrado recorrido, es decir, se duplican las fichas. Por ejemplo, una ficha en una casilla de la columna 2^4 equivale a dos en la casilla de su derecha (2^3).
M6. Vertical hacia arriba: se multiplica por dos con cada cuadrado movido. Movimiento análogo al horizontal hacia la izquierda.
M7. Vertical hacia abajo: se divide entre dos con cada cuadrado cruzado. Igual movimiento que el horizontal a la derecha.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (II a)

<u>Operaciones en el tablero</u>. **Suma.**

<u>Ejemplo</u>: 136 + 84 + 58.

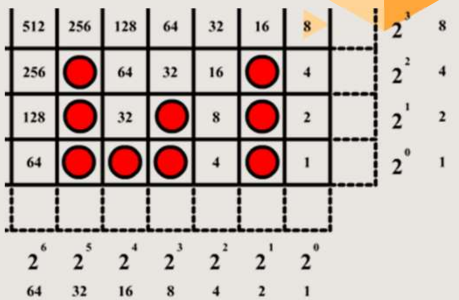
Simulador

1.- Se transforman los sumandos a expresiones con potencias de 2 y se colocan las fichas correspondientes en el tablero:

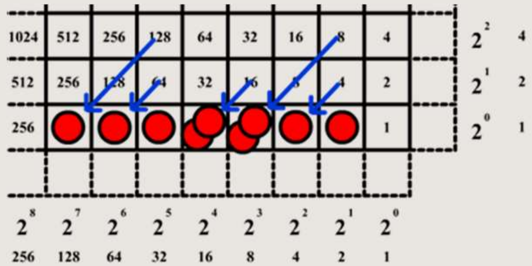
136 = 128 + 8

84 = 64 + 16 + 4

58 = 32 + 16 + 8 + 2



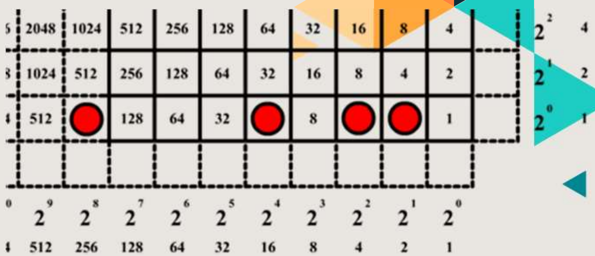
2.- Utilizando las líneas diagonales de valores equivalentes, se bajan todas las fichas a la fila horizontal inferior.



04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (II b)

Suma: 136 + 84 + 58.

3.- Se reducen las fichas del tablero de derecha a izquierda, para que a lo sumo cada celda tenga una sola ficha. Recordemos que dos fichas en una casilla equivalen a una en la de su izquierda.



4.- Convirtiendo la suma de los valores de las fichas en un número decimal, se obtiene la solución:

136 + 84 + 58 = 256 + 16 + 4 + 2 = 278

Aunque el ábaco permite realizar sumas, **no es útil en esta operación**; en el ejemplo vemos que para sumar tres sumandos acabamos en una suma de cuatro.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (III a)

Operaciones en el tablero. **Resta.** Ejemplo: 234 - 157.

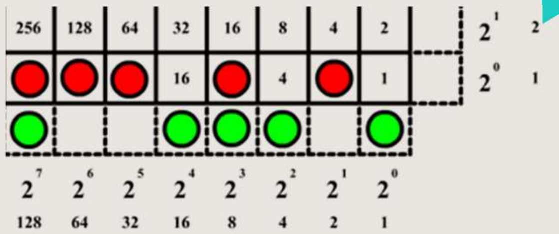
Como ayuda didáctica usamos fichas de dos colores (no es obligatorio): rojas para el minuendo (en la última fila) y verdes para el sustraendo (en el margen horizontal).

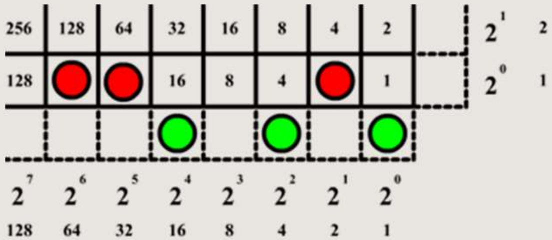
1.- Se transforman los números a expresiones con potencias de 2 y se colocan las fichas en el tablero: 234 = 128 + 64 + 32 + 8 + 2

157 = 128 + 16 + 8 + 4 + 1

2.- Para restar quitamos directamente los pares de distinto color. En nuestro ejemplo las fichas de las columnas 2^7 (128) y 2^3 (8).

Simulador

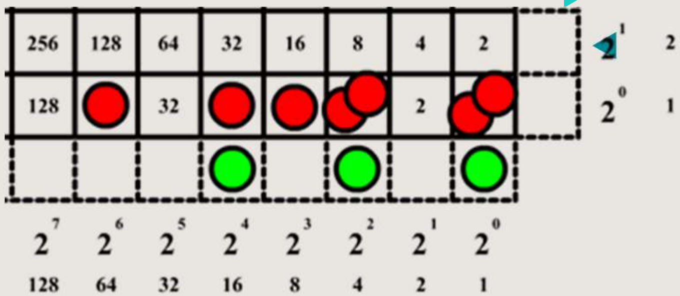




04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (III b)

Resta: 234 - 157.

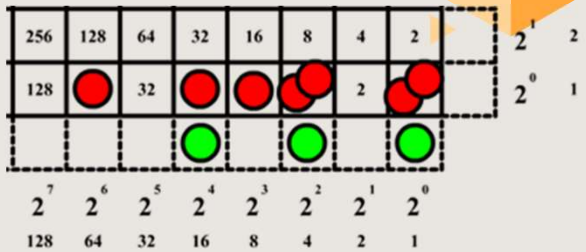
3.- Hacemos los movimientos horizontales hacia la derecha (duplicación) necesarios para conseguir que encima de cada ficha del sustraendo haya al menos una ficha del minuendo: la ficha en 2^5 se transforma en dos fichas en 2^4; una de ellas se deja ahí y la otra se convierte en dos colocadas en 2^3; de nuevo dejamos una en esa casilla y la otra la duplicamos en 2^2. La ficha de 2^1 la duplicamos al moverla a 2^0.

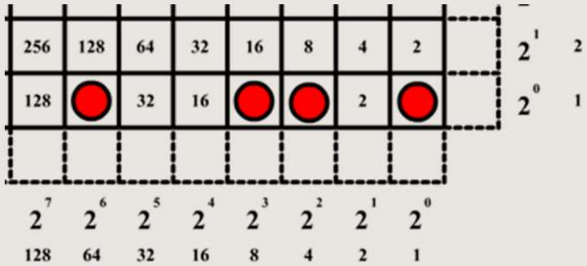


04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (III c)

Resta: 234 - 157.

4.- De nuevo, en las columnas que tienen fichas del sustraendo, retiramos del tablero la ficha del sustraendo y una de las del minuendo.





5.- Las fichas que quedan nos dan el resultado. Basta sumarlas.

234 - 157 = 64 + 8 + 4 + 1 = 77

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (IV a)

<u>Operaciones en el tablero</u>. **Multiplicación.** <u>Ejemplo</u>: 53 x 75.

Para multiplicar necesitaremos un tablero mayor (véase paso 4).

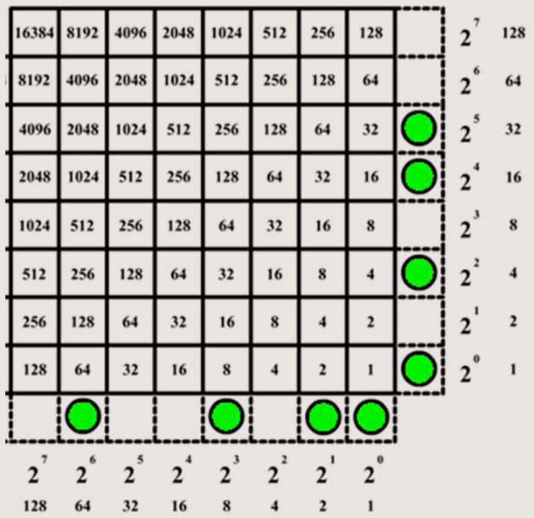
1.- Transformamos los números a expresiones con potencias de 2:

53 = 32 + 16 + 4 + 1

75 = 64 + 8 + 2 + 1

Y colocamos las fichas (verdes en la imagen) que representan a uno de los factores a lo largo del margen auxiliar inferior y las del otro en el vertical derecho.

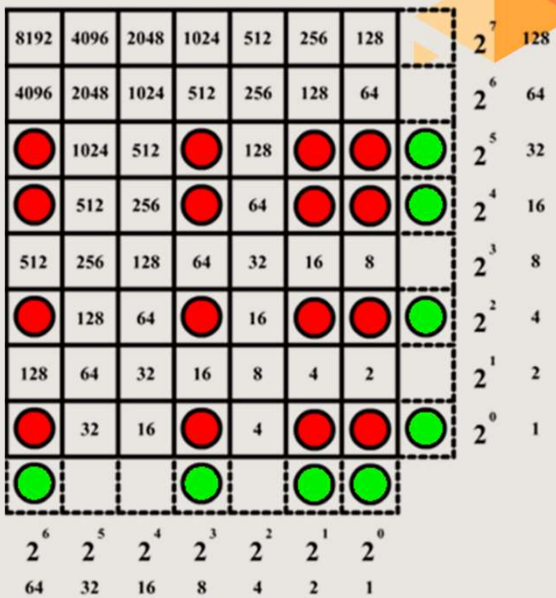
<u>**Simulador**</u>



04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (IV b)

Multiplicación: 53 x 75.

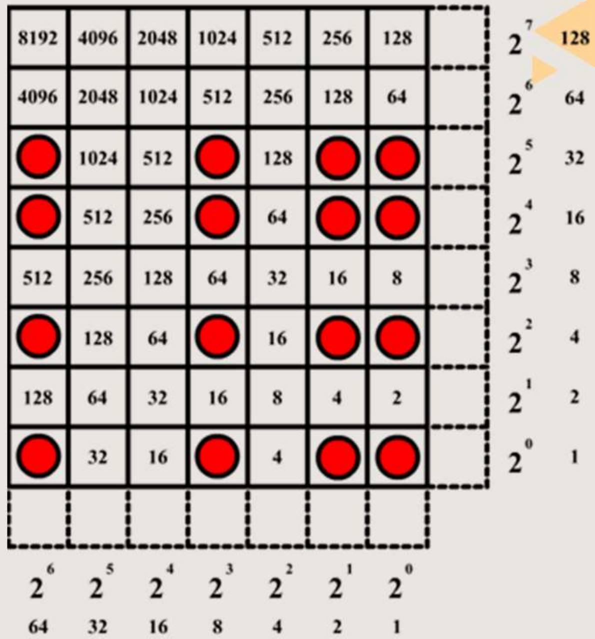
2.- Colocamos una ficha (roja) en cada cuadrado interior del tablero que sea intersección de una columna donde hay una ficha verde en el margen horizontal inferior con una fila en la que hay una ficha verde en el margen vertical derecho. El cuadrado representa el producto de esos dos valores.



04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (IV c)

Multiplicación: 53 x 75.

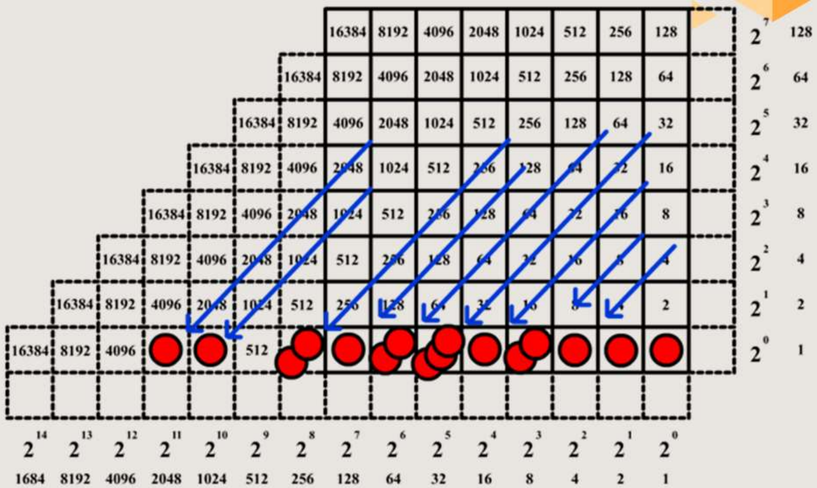
3.- Se retiran de ambos márgenes las fichas verdes que representan los factores.



04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (IV d)

Multiplicación: 53 x 75.

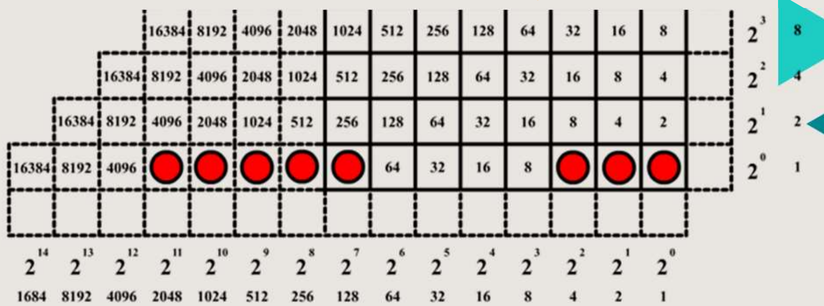
4.- Deslizamos todas las fichas en el tablero, a lo largo de sus líneas de equivalencia (las diagonales de igual valor), hasta la fila horizontal inferior.



04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (IV e)

Multiplicación: 53 x 75.

5.- Se reducen las fichas de la fila horizontal inferior de derecha a izquierda: cambiando dos fichas en un cuadrado por una en el cuadrado de su izquierda. Este proceso puede provocar una "reacción en cadena" hacia los cuadrados de la izquierda.



6.- Convirtiendo el resultado en un número decimal se obtiene:

53 x 75 = 2048 + 1024 + 512 + 256 + 128 + 4 + 2 + 1 = 3975

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (V a)

Operaciones en el tablero. **División.** Ejemplo: 60 : 7.

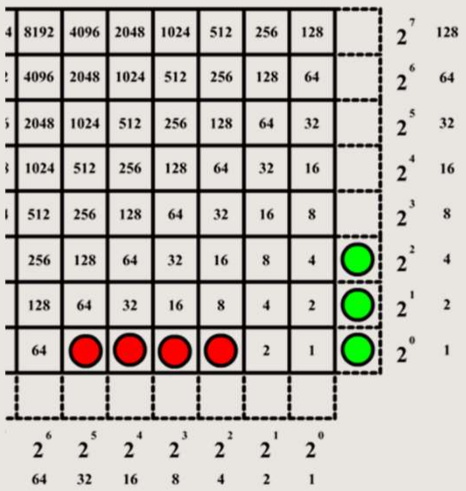
Simulador

Dependiendo de los dígitos de la división se necesitará o no un tablero mayor.

1.- Transformamos los números a expresiones con potencias de 2:

60 = 32 + 16 + 8 + 4; 7 = 4 + 2 + 1

Y se colocan las fichas del dividendo en la primera fila horizontal inferior (rojas) y las del divisor en el margen vertical auxiliar (verdes).

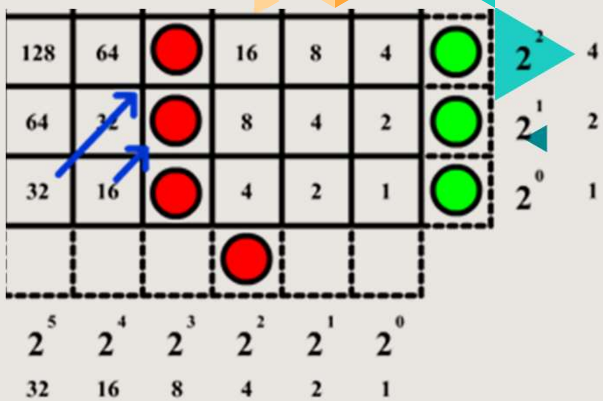


04 | Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (V b)

División: 60 : 7.

2.- Hay que ver cuántas veces el dividendo (60) contiene al divisor (7) y cuánto es el resto.

Repartimos las fichas del dividendo (60) entre las filas ocupadas del divisor (4, 2 y 1) mediante movimientos en diagonal hacia la derecha, utilizando las líneas de equivalencias, y, si hiciesen falta, movimientos de duplicación horizontales hacia la derecha.



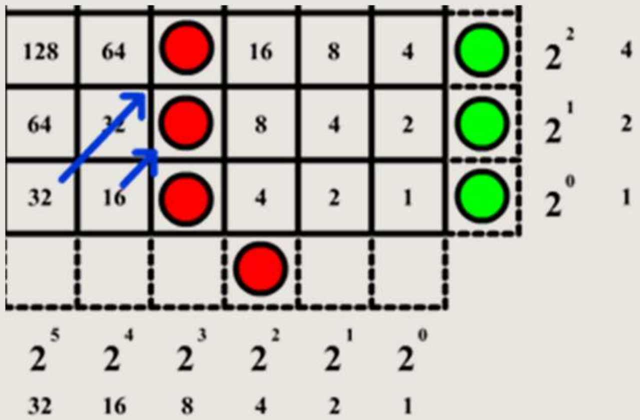
Cada columna interior de fichas con estructura análoga a la del divisor indica el número de veces que el dividendo contiene al divisor. Así se calculará el cociente.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (V d)

División: 60 : 7.

Nos queda una sola columna -que está situada sobre el 8- análoga a la del divisor; ese valor es el cociente, en este caso 8, y el resto es el número que aparece en el margen inferior, 4.

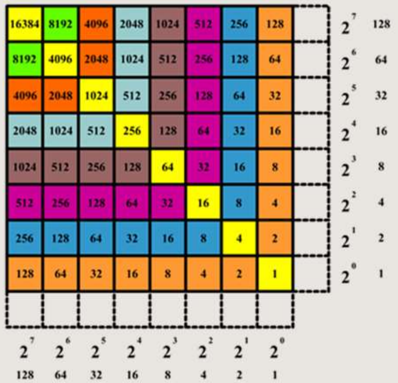
60 : 7 = 8 y de resto 4.



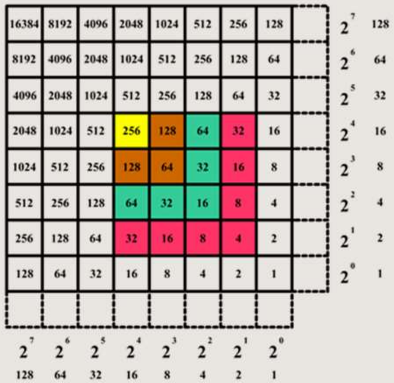
04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI a)

Operaciones en el tablero. **Raíz cuadrada.**

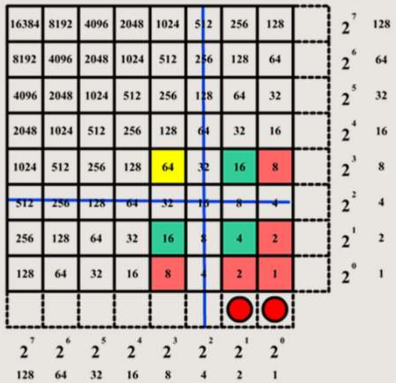
La raíz cuadrada de un número es la operación inversa al cuadrado de otro. Para calcularla con el ábaco hay que ir colocando fichas sobre él para formar un cuadrado, cuya diagonal sean celdas de la diagonal principal del tablero -cuadrados perfectos- y cuyos lados tendrán dos, tres o más casillas según valga el radicando.



Casillas interiores formando cuadrados cuya diagonal son celdas de la diagonal principal.



Cuadrado 4x4 formado al calcular la raíz cuadrada de 900, que es 16 + 8 + 4 + 2 = 30.



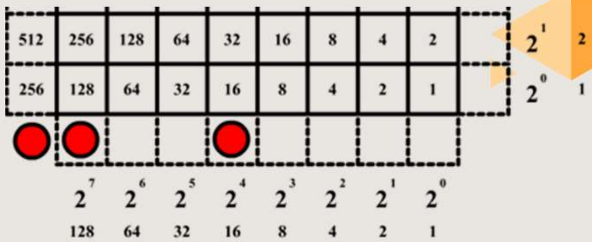
Cuadrado 3x3 formado al calcular la raíz de 124 que es 8 + 2 + 1 = 11 y de resto 2 + 1 = 3.

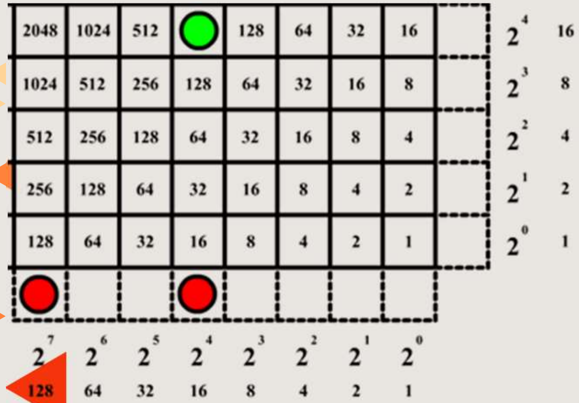
04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI b)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 400.**

Simulador

1.- El radicando se transforma en una suma con potencias de 2 y se representa por fichas (rojas), que se colocan en el margen horizontal inferior: 400 = 256 + 128 + 16



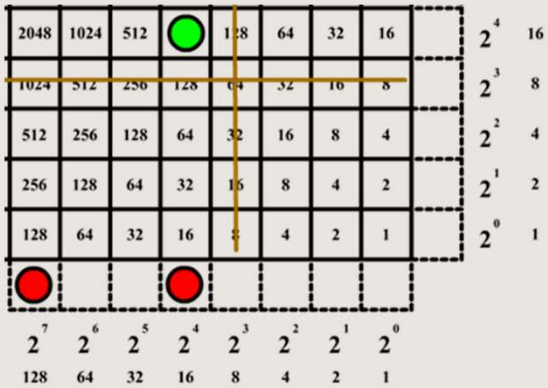


2.- La mayor de las fichas rojas cuyo valor esté en la diagonal principal (256) –y, por ello, cuadrado perfecto- se desplaza hacia esa posición colocando allí una ficha verde y quitando la roja de su sitio. Si el valor mayor no estuviese en la diagonal principal (p.e. 512), se duplican las fichas hacia la derecha.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI d)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 400.**

3.- A partir del valor marcado en la diagonal (256), y para construir un cuadrado, recorremos la diagonal principal hacia abajo, buscando el número cuya suma con los que tiene por encima y a la izquierda, hasta la primera potencia ya marcada, sea menor o igual que el nuevo radicando (valor de las fichas rojas aún no utilizadas). Estamos buscando el cuadrado de un binomio, de un trinomio,...



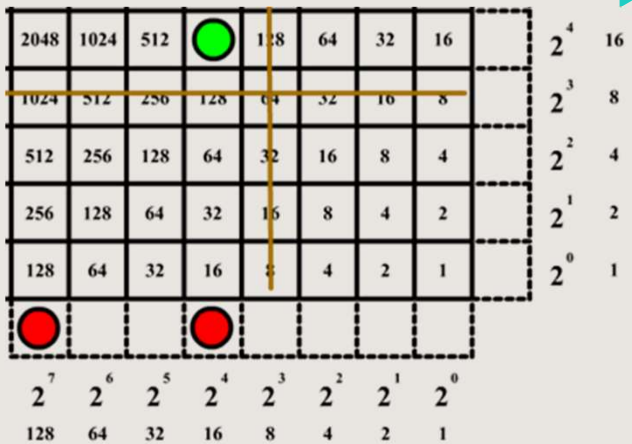
En ese caso se coloca una ficha verde en cada potencia que haya intervenido en la suma. Pero si el valor de la suma realizada es mayor, la fila y la columna de esa celda no se tienen en cuenta para formar el cuadrado, ni en los cálculos posteriores.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI e)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 400.**

En nuestro ejemplo, bajamos por la diagonal principal y nos encontramos 64, que tiene tanto encima como a la izquierda el valor 128.

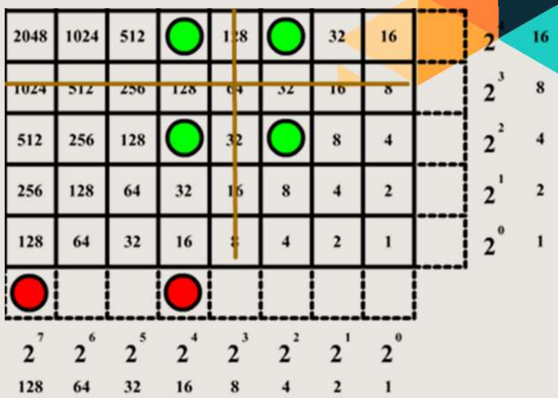
La suma de esos tres números 64 + 128 + 128 = 320, es mayor que el valor de las fichas rojas (144). Por lo tanto, los valores de esa fila y esa columna no se tienen en cuenta ahora ni en los posteriores cálculos. En las imágenes siguientes esas líneas aparecen tachadas.



04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI f)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 400.**

4.- Repetimos los pasos 2 y 3 hasta que se acaben las fichas rojas (en cuyo caso la raíz sería exacta) o hasta llegar al final de la diagonal principal: en este caso el valor de la raíz vendrá dado por el valor de las celdas del margen vertical que tengan fichas verdes y la suma de las rojas nos dará el resto.

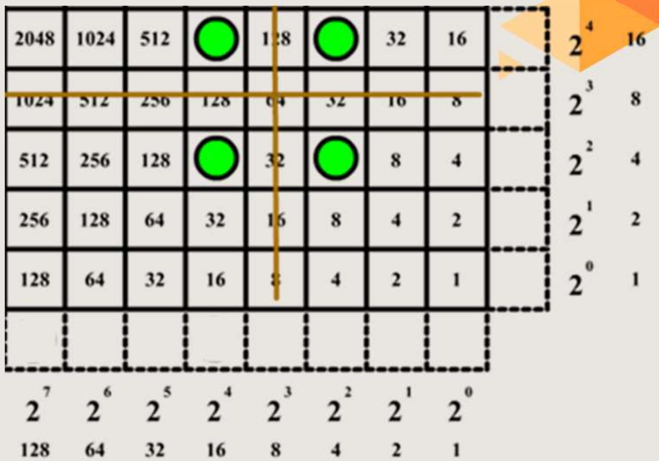


Seguimos bajando por la diagonal principal y encontramos el valor 16, que tiene encima y a su izquierda los valores 64. La suma de 16 + 64 + 64 = 144, igual que el de las fichas inferiores (144). Colocamos una ficha sobre cada uno de los valores que han intervenido en la suma y quitamos las fichas rojas.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI g)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 400.**

Hemos formado el cuadrado y no hay resto, por lo que la raíz es exacta. El resultado de la raíz es el indicado por el valor de las celdas del margen vertical que tengan fichas: 16 + 4 = 20.
La raíz cuadrada de 400 es 20.

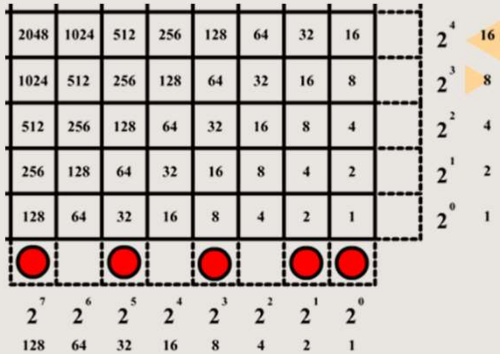


$$400 = 256 + 64 + 64 + 16 = 16^2 + 2 \cdot 64 + 4^2 = 16^2 + 2 \cdot 16 \cdot 4 + 4^2 =$$
$$= (16 + 4)^2 = 20^2$$

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI b)

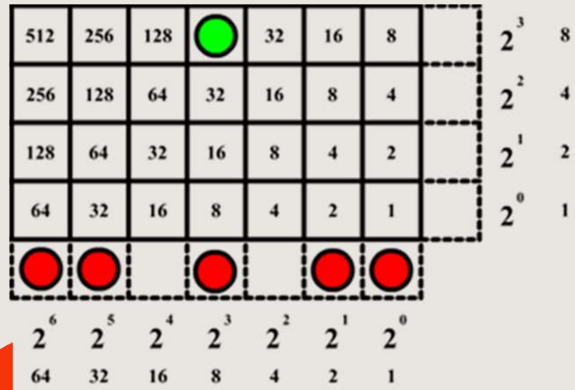
Ejemplo: **Raíz cuadrada de 171.**

[Simulador]



1.- El radicando (171) se descompone en suma de potencias de 2 y se colocan sus fichas en el margen horizontal inferior:

171 = 128 + 32 + 8 + 2 + 1

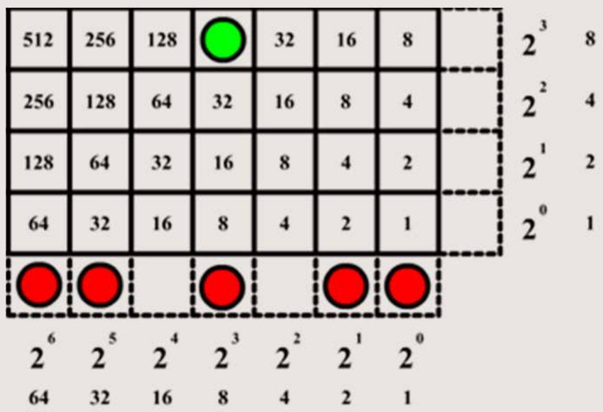


2.- Como la mayor potencia de 2 (128) no está en la diagonal principal se duplica hacia la derecha en dos fichas de valor 64 (que sí está en la diagonal). Una de ellas se coloca en la diagonal (color verde) y la otra se deja en su sitio.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI d)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 171.**

3.- A partir del valor marcado (64), y para construir un cuadrado, recorremos la diagonal principal hacia abajo, buscando el número cuya suma con las potencias que tiene por encima y a la izquierda, hasta la primera potencia ya marcada, sea menor o igual que el valor de las fichas rojas.

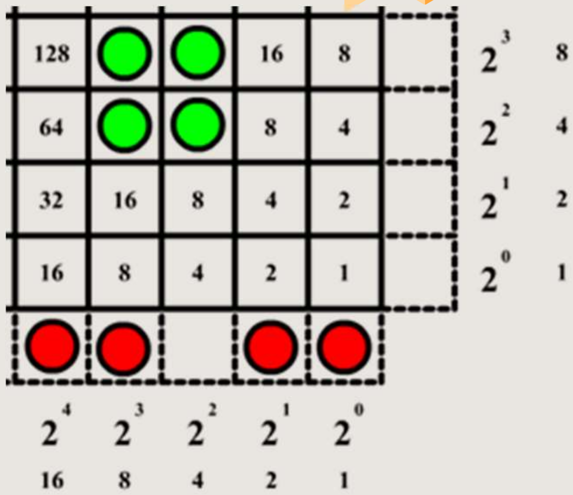


Cuando así sea se coloca una ficha verde en cada potencia que haya intervenido en la suma. Pero si el valor de la suma realizada es mayor, la fila y la columna de esa celda no se tienen en cuenta para formar el cuadrado, ni en los cálculos posteriores.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI e)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 171.**

4.- En nuestro ejemplo, bajamos por la diagonal principal y tenemos el valor 16, que tiene encima y a la izquierda los valores 32. La suma de 16 + 32 + 32 = 80, menor que la suma de las fichas (107). Por lo que colocamos una ficha verde sobre cada uno de los valores que han intervenido en la suma. Y eliminamos de las rojas tres de valores 32, 32 y 16.

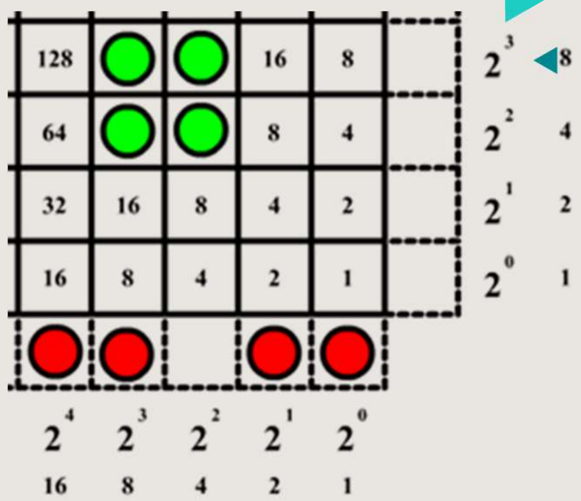


Taller: *Instrumentos y técnicas de cálculo.*
XVIII CEAM Granada.

04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI f)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 171.**

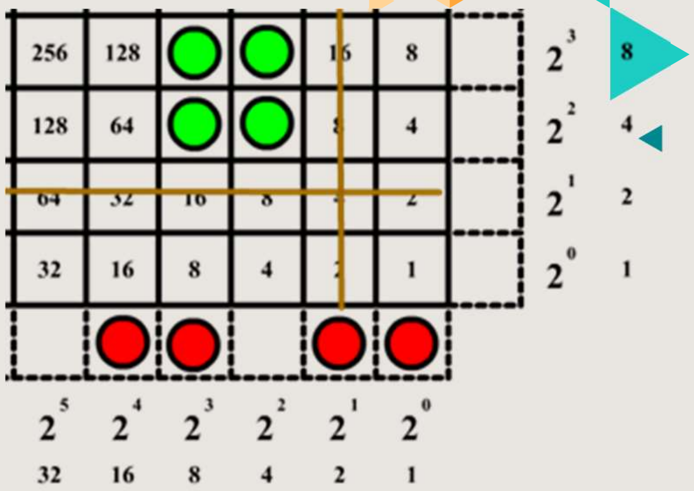
5.- Repetimos los pasos 3 y 4 hasta que se acaben las fichas rojas (en cuyo caso la raíz será exacta) o hasta llegar al final de la diagonal principal: en este caso el valor de la raíz vendrá dado por el valor de las celdas del margen vertical que tengan fichas verdes y la suma de las rojas nos dará el resto.



04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI g)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 171.**

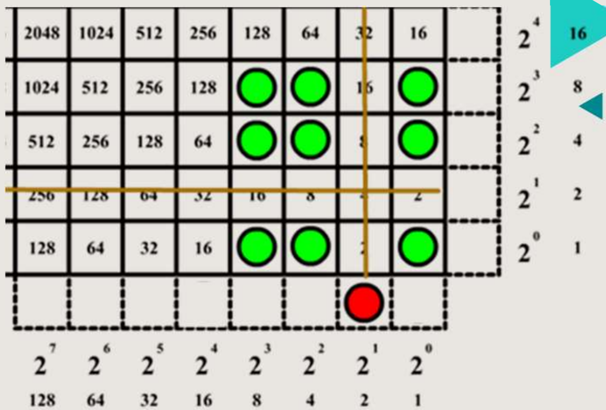
En nuestro ejemplo, bajamos por la diagonal principal y encontramos el valor 4, que tiene tanto encima como a la izquierda los valores 8 y 16. Los sumamos: 4 + 8 + 16 + 8 + 16 = 52, mayor que el valor residual que tenemos ahora (27). Por lo tanto, los valores de esa fila y esa columna no se tienen en cuenta y tampoco en los siguientes cálculos.



04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI h)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 171.**

6.- Seguimos bajando por la diagonal principal y llegamos al 1, que tiene tanto encima como a la izquierda los valores 4 y 8. La suma de 1 + 4 + 8 + 4 + 8 = 25, menor que el valor residual indicado por las fichas rojas (27). Colocamos una ficha sobre cada uno de los valores de la suma. Y eliminamos las fichas rojas de valores 16, 8 y 1, quedando únicamente la de valor 2.

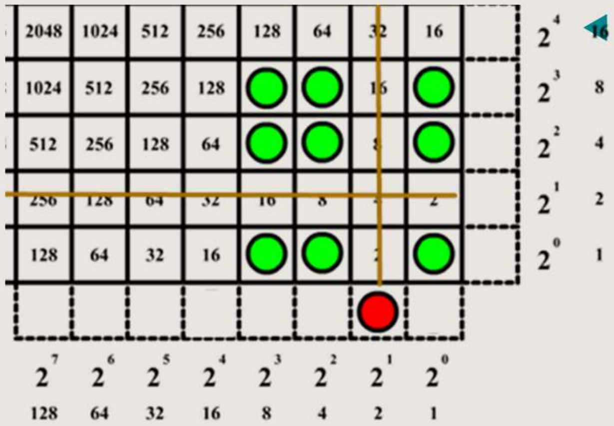


04 Ábaco de tablero de ajedrez binario de Neper (VI i)

Ejemplo: **Raíz cuadrada de 171.**

Hemos terminado de recorrer la diagonal principal y formado un cuadrado. El resultado de la raíz es la suma de los valores de las celdas del margen vertical que tienen fichas verdes: 8 + 4 + 1 = 13 y el resto es 2 (ficha roja).

$$171 = (64 + 32 + 8) + (32 + 16 + 4) + (8 + 4 + 1) + 2 = (8\cdot8 + 8\cdot4 + 8\cdot1) + (4\cdot8 + 4\cdot4 + 4\cdot1) + (1\cdot8 + 1\cdot4 + 1\cdot1) + 2 = (8 + 4 + 1) \cdot (8 + 4 + 1) + 2 = (8 + 4 + 1)^2 + 2 = 13^2 + 2$$



05 Referencias

GORRIZ, M. y VILCHES, S. (2017). *Napier: la semilla del cálculo y la computación*, Genios de las matemáticas, RBA, Barcelona.
Se puede encontrar en:
http://www.librosmaravillosos.com/Napier/index.html

GRUPO ALQUERQUE (2022). *Orígenes de los instrumentos de cálculo.*
Se puede encontrar en:
http://www.grupoalquerque.es/ferias/2022/instrumentos.html

KOLPAS, S. y TOMASH, E. (December 2018). *John Napier's Binary Chessboard Calculator – Simplified, MAA Publications.*
Se puede encontrar en:
https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/john-napiers-binary-chessboard-calculator-simplified

NEPERO, I. (1626). *Rabdologiae seu Numerationis per Virgulas libri duo, Books Google*. Se puede encontrar en: https://books.google.es/

REQUENA, A. (2001). *Una joya de la corona: el ábaco neperiano*, Profes.net, Editorial SM.

¡GRACIAS!

¿Alguna pregunta?

XVIII CEAM Granada. 2023