

# MÁS JUEGOS DE LÁPIZ Y PAPEL (I)

José Muñoz Santonja

## 1. Jugando con los materiales más comunes.

La historia de los juegos se pierde en el principio de los tiempos. Es posible encontrar juegos de tablero en las antiguas civilizaciones romana, egipcia o mesopotámica. Muchos de ellos han llegado a nuestros días sin modificaciones, mientras que otros han evolucionado adaptándose a los tiempos.

Sin embargo, hay otros juegos que son más recientes, y no solo porque en las últimas décadas se haya potenciado la creación de juegos de todo tipo, sino porque hay una serie de juegos que no han surgido hasta disponer de los materiales necesarios para realizarlos. Eso es lo que ocurre con los juegos de lápiz y papel.

Está aceptado que la aparición de este tipo de juegos no surge hasta el siglo XIX en que se popularizó el uso de los materiales como lápiz y papel, especialmente en las escuelas. Es decir, se suele considerar que este tipo de juegos comenzaron a aparecer relacionados con las tediosas horas escolares, para aprovechar los huecos existentes entre los ratos de estudio. Vamos a darlo por bueno. Aunque no sabemos si antes de estos materiales, cuando se trabajaba con tiza y pizarrín, ya existirían algunos de ellos.

Inicialmente, los juegos de lápiz y papel parecen que están un poco estancados y que no han evolucionado al mismo ritmo que otros tipos de juegos. Pero estudiando un poco la gran variedad de juegos existentes, podemos comprobar cómo en el siglo pasado, algunos matemáticos inventaron una serie de juegos de estrategia, muy interesantes, donde se aplicaban aspectos matemáticos no especialmente antiguos, como la topología.

Lo cierto es que este tipo de juegos son los que requieren materiales más comunes y al alcance de cualquiera. Se puede jugar en cualquier situación, prácticamente en cualquier lugar y son bastante atractivos. Lo interesante, como en la mayoría de juegos aparecidos en esta sección, no es solo el mero placer de jugar y de ganar, si podemos, al contrario, sino el estudiar estrategias que nos permitan, si no ganar seguro, al menos favorecer nuestra posición.

Posiblemente pensemos que en este mundo tecnológico, están anticuados este tipo de juegos, pero todos nos hemos encontrado en algún momento sin wifi. Hablando en serio, los juegos de lápiz y papel tienen muchas ventajas: se pueden jugar prácticamente en cualquier sitio y con medios asequibles, suelen ser fáciles de entender, pues tienen reglas sencillas, por lo que todo el mundo puede comenzar a jugar y enseguida suelen enganchar, por lo que desde el principio intentamos encontrar movimientos y estrategias para conseguir vencer a nuestro oponente. Por ello, son interesantes para trabajarlos en el aula.

Para los aficionados a las nuevas tecnologías, comentaremos que existen muchas páginas en Internet con información y referencias a este tipo de juegos. Incluso en varias de ellas es posible jugar en línea al propio juego.

No es la primera vez que tratamos este tema en este apartado de juegos. Ya en el año 2002, dentro de la sección de Juegos que se publicaba en la revista SUMA, editada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, publicamos una primera entrega<sup>1</sup> sobre juegos con lápiz y papel. Con este artículo no pretendemos cerrar el campo, pues aunque no se piense así, este tipo de juegos tiene una variedad mucho mayor de la que se pueda creer. Nuestra intención es simplemente presentar una serie de juegos interesantes y atractivos para entretenernos y, siempre que sea posible, estudiar la lógica que existe detrás de los juegos.

## 2. Toros y vacas.

En el último tercio del siglo pasado se comercializó un juego que se hizo muy popular y al que los aficionados a los juegos dedicamos bastantes horas de entretenimiento. Me refiero al conocido como Mastermind, creado en 1970, un juego de colores en el que había que descubrir la serie de colores que había creado el contrincante preguntando con otras series, conociendo el número de colores que aparecían en la serie oculta y el número de los que estaban bien colocados o no. La versión inicial se modificó después presentando juegos con letras o números. Incluso este tipo de entretenimiento dio el salto a los pasatiempos, encontrándose, con facilidad, retos en los que tenemos la información necesaria para encontrar la solución. Por ejemplo, en la siguiente imagen tenemos un pasatiempo sacado del desaparecido periódico Sol, en concreto, del 17 de junio de 1990.



Figura 1: Diario Sol. 17/06/1990

Este juego de colores está basado en un juego mucho más antiguo conocido como “Bulls & Cows” (Toros y vacas) que aunque no he conseguido encontrar información exacta, se estima que puede remontarse al siglo XIX. Básicamente es el juego que aparece en el pasatiempo donde, para encontrar un número de cuatro dígitos desconocidos, se van

---

<sup>1</sup> Se puede consultar una versión digital en la página de divulgamat:  
[http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com\\_content&view=article&id=10081:julio-2005-juegos-de-lz-y-papel-publicado-en-la-revista-suma-no-40-2002&catid=77:juegos-matemcos&directory=67](http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10081:julio-2005-juegos-de-lz-y-papel-publicado-en-la-revista-suma-no-40-2002&catid=77:juegos-matemcos&directory=67)

proponiendo números y se indican cuantos números hay que estén en el número buscado diferenciando si están en el sitio correcto o no.

Este juego lo aprendí en la década de los 70 cuando estaba estudiando en la universidad, ya que era un juego con el que nos entreteníamos en los ratos perdidos entre clases, y a veces en las mismas clases. Nosotros lo conocíamos como los numeritos y para nosotros los números que estaban en la misma posición eran muertos, y los que estaban en el número, pero no en la misma posición, eran heridos.

La idea del juego, como se ve es muy simple. Se van diciendo números de cuatro cifras y el contrario nos indica cuantos muertos y cuantos heridos hay. El modo en que nosotros jugábamos es que cada jugador esconde un número y el contrario va lanzando una propuesta, por turno, y el otro responde. El primero que consigue descubrir el número del contrario gana.

Se juega con las cifras del 0 al 9, aunque el cero no puede ir en primer lugar. Veamos un ejemplo de partida. Vamos a ir diciendo números y entre paréntesis indicaremos cuántos muertos (cifras en la misma posición) y heridos hay (cifras en distinta posición que en el número original).

- 1234 (2H)
- 5678 (1M)

De lo anterior se deduce que entre el 0 y el 9 hay una cifra del número, luego comenzamos a probar con la información que tenemos.

- 1239 (1M, 1H)

Lo siguiente nos da bastante información. El 9 que acabamos de colocar tiene que ser el muerto, ya que las demás cifras no se han cambiado, y al disminuir en uno el número de heridos nos asegura que el 4, que es la cifra que no hemos puesto, también está en el número inicial.

- 1249 (1M, 2H)

El número 3 no es una de las cifras, conocemos el 4 y 9 y una de las dos que quedan.

- 1439 (1M, 1H)

Con esta propuesta ya hemos encontrado el número. El 2, que no aparece en la propuesta anterior, es la tercera cifra. Como además el 4 ha sido siempre herido, sólo le queda un lugar, el primero. El 2 no puede estar en el segundo lugar, porque es herido, sólo le queda el tercer puesto. Y nos queda una cifra de la segunda propuesta, que como era muerto estaba en su sitio y tiene que ser el 6. Luego el número buscado es el 4629.

Este juego se ha utilizado en muchas ocasiones como ejemplo de programación, por lo que es fácil encontrar programas, incluso en el último tercio del siglo pasado, que generan este tipo de propuestas y que permiten jugar en línea.

En la página de *Math is fun*, podemos encontrar este juego pudiendo elegirse versiones con 3, 4 ó 5 números, letras o colores. Es posible jugarlo en la siguiente dirección:

<https://www.mathsisfun.com/games/bulls-and-cows.html>

También podemos encontrar sitios donde se hablan de estrategias para ganar en este juego, tanto con lápiz y papel como con ordenador. Incluso es posible jugar. Se pueden consultar las siguientes direcciones:

<https://divulgadores.com/muertos-heridos-juego-logica-i/>

<https://divulgadores.com/muertos-heridos-juego-logica-ii/>

### 3. Sendero solitario.

En el artículo que cité anteriormente sobre juegos, aparecido en la revista SUMA, uno de los juegos que presentamos se llama *Senderos*, aunque el nombre que le dio su autor David Silverman fue *Slither*. Este es un juego también considerado topológico en el que los dos jugadores deben construir un camino sobre una trama de puntos, cada jugador en su turno debe trazar un segmento horizontal o vertical que una la poligonal dibujada hasta el momento con un nuevo punto adyacente. El jugador que en su jugada tiene que cerrar el camino pierde.

En su excelente libro sobre juegos y matemática, Luis Ferrero nos propone una versión de este juego en forma de solitario, llamado rutas solitarias, aunque a mí me gusta más senderos solitarios. En él, sobre una trama de puntos el jugador debe trazar un recorrido que contenga a todos los puntos. Para ello debe trazar segmentos que unan dos puntos adyacentes, en horizontal o vertical con las siguientes restricciones:

- ❖ Un segmento no puede cruzar otro ya trazado.
- ❖ En un punto no pueden coincidir más de dos segmentos.

Básicamente se reduce a dibujar, en una trama rectangular de puntos, una poligonal que pase una sola vez por todos los puntos de la trama.

Lógicamente, por pocos puntos con los que se comience, suele haber muchas soluciones diferentes. Para cortar la resolución del solitario, ya que pueden existir muchas soluciones posibles, suele ser un buen método considerar iguales los resultados que sean simétricos uno de otro. Esa simetría puede considerarse respecto a un eje vertical, horizontal e incluso diagonal si la trama de puntos es cuadrada, de esa forma se reducen bastantes el número de soluciones. Con esta condición, las soluciones siguientes serían la misma.

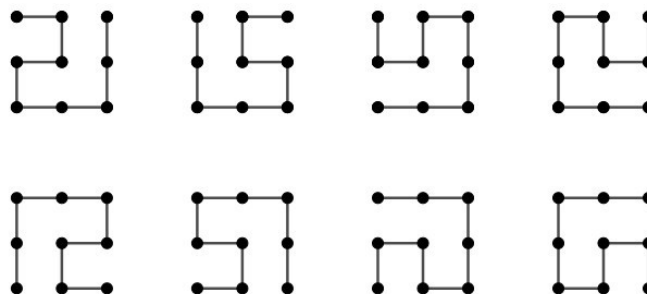


Figura 2: Soluciones iguales

Con la restricción anterior, el número de soluciones se reduce drásticamente, por lo que es posible afrontar la resolución del solitario en un tiempo prudencial, aunque es corriente que al afrontar el proceso resolutivo aparezcan, aun sin quererlo, soluciones que son

iguales. En el caso de tener una trama cuadrada de lado tres, las soluciones que a mí me salen quedan reducidas a las siguientes.

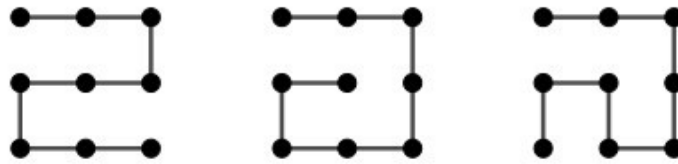


Figura 3: Soluciones en trama 3x3

La normal es plantear recuadros, no necesariamente cuadrados, y con mayor número de puntos, por ejemplo de 3x4 o 4x4.

Este juego se puede convertir con facilidad en un juego para dos o más jugadores. Basta entregar una plantilla con tramas limpias a cada jugador y, ocultando el proceso para que no lo vean los contrarios, cada jugador intenta encontrar todas las soluciones posibles. Gana el jugador que más soluciones encuentre. Lo normal es dar un tiempo, por ejemplo cinco minutos, y al acabar el tiempo se comprueba quien tiene más soluciones.

En esta modalidad de juego se puede permitir considerar, al menos en las primeras jugadas, como diferentes soluciones que sean iguales por simetría como hemos visto antes. Si no ponemos esa restricción los jugadores se animan más al encontrar bastantes soluciones en un momento.

Si se quiere complicar el solitario se puede ampliar las condiciones permitiendo que dos puntos cercanos se unan con un segmento en diagonal, de esta manera nos podemos encontrar con soluciones como las siguientes.

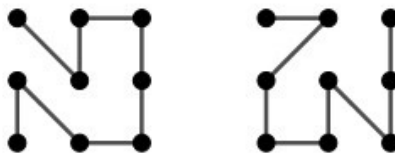


Figura 4: Soluciones con trazos en diagonal

#### 4. Puntos y cajas.

Veamos ahora un juego de los que quizás sean más conocidos de lápiz y papel. Aunque cuando he jugado a él yo lo conocía como los cuadraditos, es conocido como *Dots and boxes*. El primero que lo presentó fue Édouard Lucas, un matemático francés del siglo XIX gran creador de juegos recreativos de matemáticas que lo llamó La Pipopipette. En el año 2001, Ian Stewart publicó en la revista *Scientific American* un artículo profundizando en este juego.

El juego se realiza también sobre una trama de puntos y está pensado para dos jugadores, cada uno de los cuales con un lápiz de distinto color.

El proceso del juego es el siguiente:

- a) Cada jugador, en su turno, dibuja un segmento que una dos puntos adyacentes, siempre en horizontal o vertical.

- b) Cuando el trazo que dibuja un jugador completa un cuadradito de lado unidad, el jugador escribe su inicial dentro del cuadradito y se lo adjudica. Después de formar el cuadrado puede dibujar un nuevo trazo. Si con ese nuevo trazo se cierra otro cuadradito sigue repitiendo el proceso hasta que al trazar un segmento no cierre ningún cuadrado.
- c) Cuando toda la trama se ha cuadrículado, se cuentan los cuadraditos obtenidos por cada jugador y gana, lógicamente, quien haya conseguido más.

En la siguiente imagen aparece una partida en una trama reducida de 3x3. Las partidas normales se desarrollan en tramas más grandes, tanto cuadradas como rectangulares.

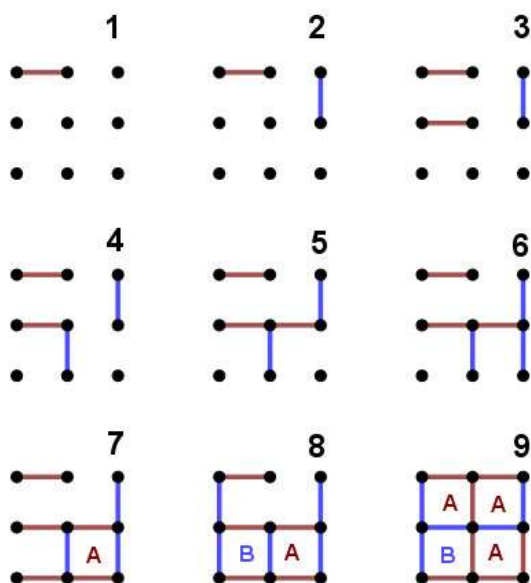


Figura 5: Partida de Puntos y Cajas

Este juego también es posible encontrarlo en multitud de lugares en Internet para jugar de forma on-line, normalmente contra el propio programa. En la siguiente página podemos encontrar el juego explicado, indicando posibles estrategias y permite jugar contra la máquina en varias dimensiones de la trama.

<http://www.papg.com/show?1TMU>

## 5. Trazando figuras.

Veamos un nuevo juego sobre tramas, inicialmente rectangulares.

Este juego también es para dos jugadores que pueden jugar cada uno con un lápiz de distinto color. Se juega sobre una trama cuadrada o rectangular con las siguientes instrucciones.

- a) Cada jugador, en su turno, debe dibujar un rectángulo, que puede ser cuadrado, cuyos vértices sean los puntos de la trama. De entrada, suponemos que los lados son horizontales y verticales, es decir, excluimos la posibilidad de dibujar rectángulos girados.

- b) Los lados del rectángulo que se trace pueden cruzarse con lados de otros cuadrados, pero no pueden superponerse, es decir, entre dos puntos adyacentes no pueden coincidir trozos de lados distintos.
- c) Ningún punto puede ser vértice de más de un rectángulo.
- d) Cuando un jugador no puede trazar un rectángulo sin incumplir las condiciones anteriores, se acaba la partida y gana el último jugador que ha conseguido dibujar un rectángulo.

En la siguiente imagen puede verse una partida, sobre una trama de 5x6 que se ha completado en sólo dos jugadas.

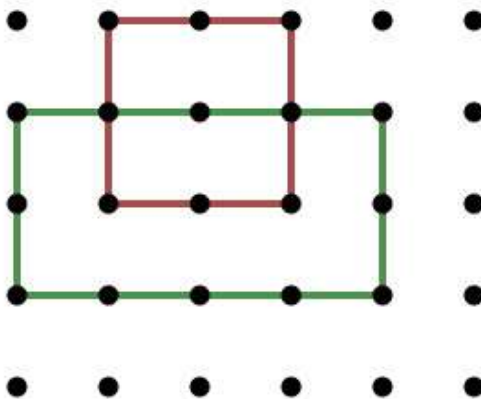


Figura 6: Partida de Trazando Figuras

Lo normal es que las tramas tengan más puntos.

Una variedad del juego sería jugar sobre tramas isométricas dibujando triángulos o hexágonos.

Hasta aquí esta primera parte de la entrega sobre juegos de lápiz y papel. En ella hemos visto varios que utilizan una trama de puntos como tablero, de forma que nos guíemos por ellos para trazar las líneas que dan lugar al juego. En la segunda parte vamos a ver algunos juegos más modernos y donde introduciremos conceptos topológicos o juegos de guerra desarrollables con lápiz y papel.

## 6. Referencias.

FERRERO, L. (1991): El juego y la matemática. La Muralla, Madrid.

GRUPO ALQUERQUE (2002): "Juegos de lápiz y papel". *SUMA* nº 40, pp. 123-124.