

# ÁBACO DE TABLERO DE AJEDREZ DE JOHN NEPER

## 1. Introducción

John Neper -matemático e inventor escocés (1550-1617)- escribió el libro *Rabdologiae*, que fue publicado en 1617 tras su muerte. En esta obra se exponen tres dispositivos para ayudar en los cálculos aritméticos a personas con escasos conocimientos matemáticos: las "virgules" (llamadas posteriormente *Varillas de Neper*); el "*multiplicationes promptuario*" (*Prontuario de multiplicación*) y el "*scacchiae abaco*" (*Ábaco de tablero de ajedrez*).

La *Aritmética local* que se realiza en el ábaco de tablero de ajedrez, se denomina así por la similitud del tablero con el del conocido juego y se describe en la sección final del libro: se presentan las reglas para su uso y se explica cómo utilizar el tablero para sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas. El ábaco se basa en la aritmética binaria no posicional, reduciendo a la mitad y duplicando.

## 2. Tablero

El tablero para la Aritmética local de Neper se construye a partir de un tablero 8x8, al que se añaden una fila inferior y una columna a la derecha; y que en la parte exterior tiene las potencias de 2 -y sus valores decimales- (imagen de la derecha).

Multiplicando los valores de la fila y la columna numérica se obtienen los de las casillas interiores (imágenes inferiores).

								$2^7$	128
								$2^6$	64
								$2^5$	32
								$2^4$	16
								$2^3$	8
								$2^2$	4
								$2^1$	2
								$2^0$	1
$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$		
128	64	32	16	8	4	2	1		

Tabla de doble entrada con las potencias de dos.

$2^{14}$	$2^{13}$	$2^{12}$	$2^{11}$	$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$		$2^7$	128
$2^{13}$	$2^{12}$	$2^{11}$	$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$		$2^6$	64
$2^{12}$	$2^{11}$	$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$		$2^5$	32
$2^{11}$	$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$		$2^4$	16
$2^{10}$	$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$		$2^3$	8
$2^9$	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$		$2^2$	4
$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$		$2^1$	2
$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$		$2^0$	1
$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$			
128	64	32	16	8	4	2	1			

16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128		$2^7$	128
8192	4096	2048	1024	512	256	128	64		$2^6$	64
4096	2048	1024	512	256	128	64	32		$2^5$	32
2048	1024	512	256	128	64	32	16		$2^4$	16
1024	512	256	128	64	32	16	8		$2^3$	8
512	256	128	64	32	16	8	4		$2^2$	4
256	128	64	32	16	8	4	2		$2^1$	2
128	64	32	16	8	4	2	1		$2^0$	1
$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$			
128	64	32	16	8	4	2	1			



$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
128	64	32	16	8	4	2	1

**Ejemplo 1:** Representar en el tablero el número 97.

En primer lugar, descomponemos 97 como suma de potencias de 2.

Buscamos en la tabla anterior la mayor potencia de 2 que se acerque por defecto al número dado, en nuestro caso es 64 y los restamos ( $97 - 64 = 33$ ). Repetimos buscando ahora la potencia de 2 más cercana al nuevo valor (33) y es 32. Los restamos,  $33 - 32 = 1$ . Tendremos que:

$$97 = 64 + 32 + 1 = 2^6 + 2^5 + 2^0$$

Después, en el tablero, se colocarán en la línea inferior tres fichas en las celdas correspondientes a  $2^6$ ,  $2^5$  y  $2^0$ :

512	256	128	64	32	16	8	4		$2^2$	4
256	128	64	32	16	8	4	2		$2^1$	2
128	64	32	16	8	4	2	1		$2^0$	1
	●	●						●		
	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$		
	128	64	32	16	8	4	2	1		

**Ejemplo 2:** Representar 149.

$$149 = 128 + 21 = 128 + 16 + 5 = 128 + 16 + 4 + 1 = 2^7 + 2^4 + 2^2 + 2^0$$

En el tablero colocaremos en la línea inferior cuatro fichas representando a  $2^7$ ,  $2^4$ ,  $2^2$  y  $2^0$ :

512	256	128	64	32	16	8	4		$2^2$	4
256	128	64	32	16	8	4	2		$2^1$	2
128	64	32	16	8	4	2	1		$2^0$	1
●			●		●		●			
	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$		
	128	64	32	16	8	4	2	1		

## 4. Movimientos de las fichas. Reglas

### 4.1. Movimientos diagonales

Movimiento 1. En diagonal hacia arriba y hacia la izquierda: se multiplica por cuatro con cada cuadrado movido. Luego cuatro fichas en una casilla del interior del tablero, por ejemplo, en la diagonal del 8, se transforman en una ficha en la casilla 32.

Movimiento 2. En diagonal hacia abajo y hacia la derecha: se divide por cuatro con cada cuadrado movido. Por ello, una ficha en la casilla 128, por ejemplo, se convierte en cuatro de la casilla 32.





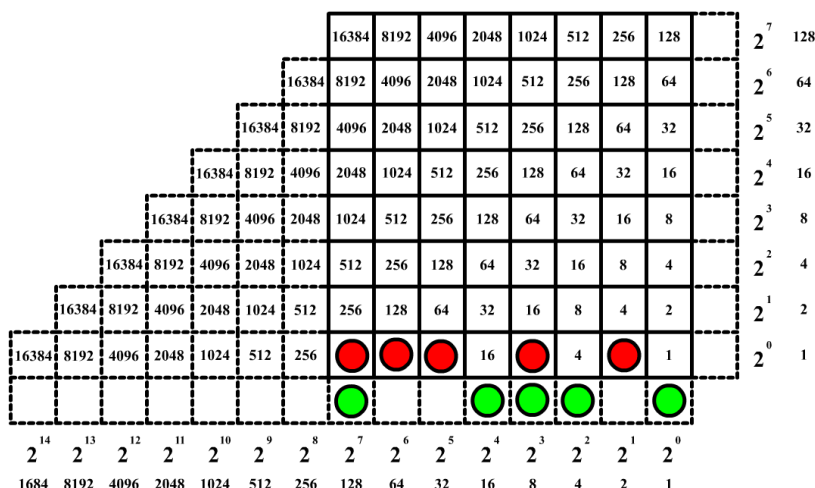
Transformamos el minuendo y el sustraendo a valores binarios:

$$234 = 128 + 106 = 128 + 64 + 32 + 4 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1$$

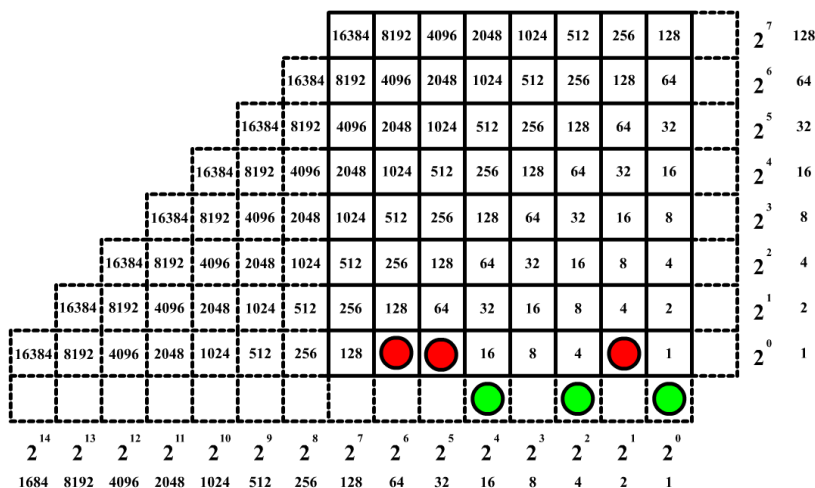
$$157 = 128 + 29 = 128 + 16 + 13 = 128 + 16 + 8 + 4 + 1 = 2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

Aunque en la práctica no es necesario, para facilitar la explicación vamos a utilizar fichas de dos colores: uno para el minuendo (rojo) y otro para el sustraendo (verde).

Paso 1. Colocamos las fichas correspondientes al minuendo en la última fila horizontal inferior del tablero y las del sustraendo en el margen horizontal inferior.



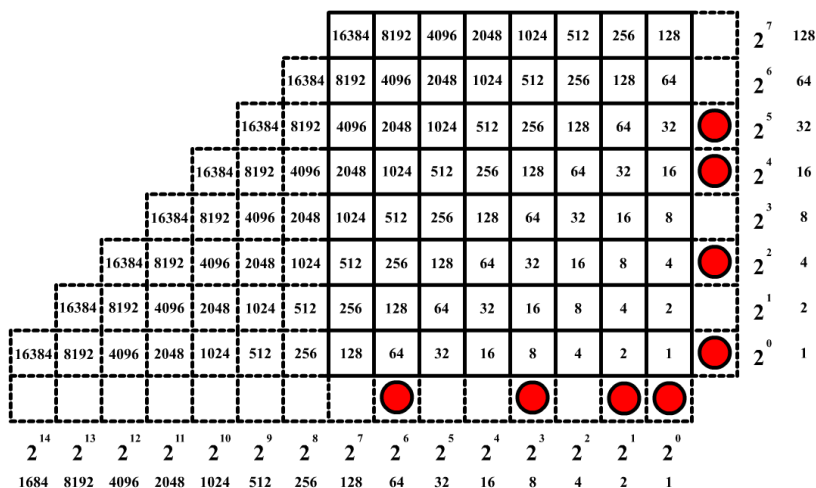
Paso 2. Antes de comenzar a mover las fichas, para simplificar el tablero, ya que estamos restando es aconsejable quitar directamente los pares de distinto color. En nuestro ejemplo las fichas de las columnas  $2^7$  (128) y  $2^3$  (8).



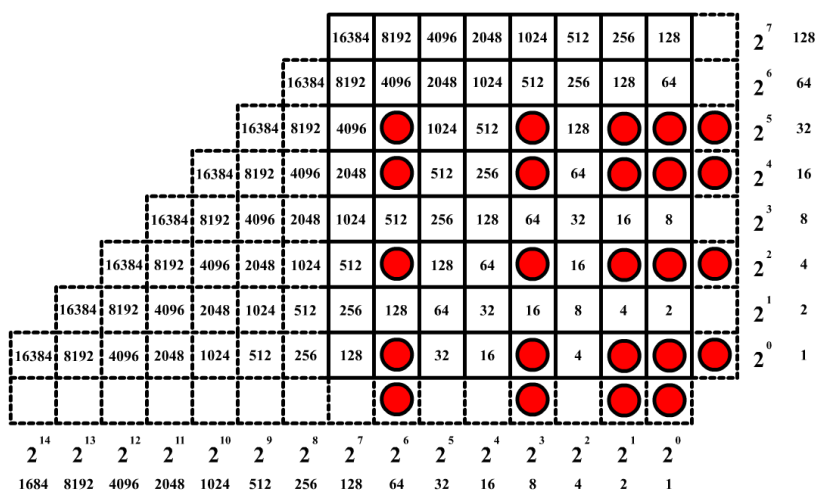
Paso 3. Hacemos los movimientos horizontales hacia la derecha (duplicación) necesarios para conseguir que encima de cada ficha del sustraendo haya al menos una ficha del minuendo: la ficha en  $2^5$  se transforma en dos fichas en  $2^4$ ; una de ellas se deja ahí y la otra se convierte en dos colocadas en  $2^3$ ; de nuevo dejamos una en esa casilla y la otra la duplicamos en  $2^2$ . La ficha de  $2^1$  la duplicamos al moverla a  $2^0$ .

Hemos conseguido que encima de cada ficha del sustraendo haya al menos una del minuendo.

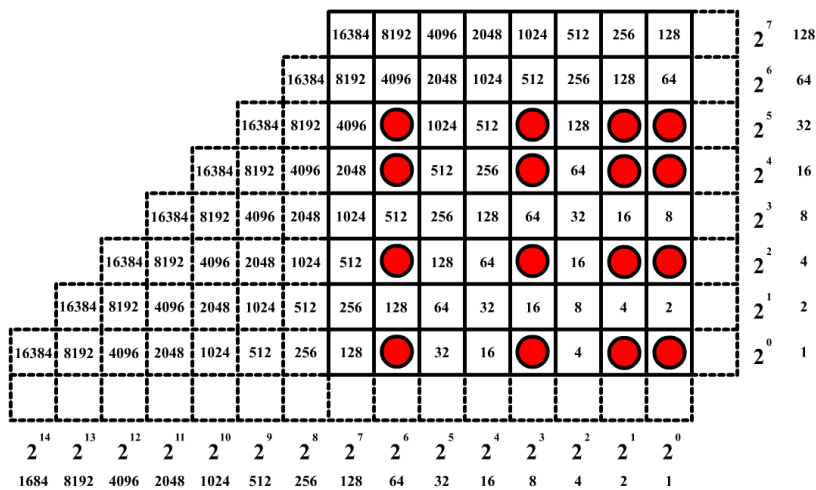




Paso 2. Colocamos una ficha en cada cuadrado interior del tablero que sea intersección de una columna donde hay una ficha en el margen horizontal inferior con una fila en la que hay una ficha en el margen vertical derecho. El cuadrado representa el producto de esos dos valores.

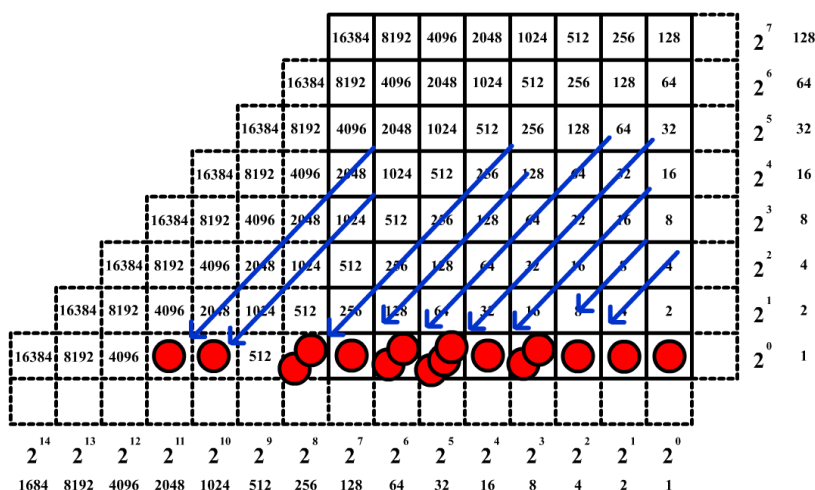


Paso 3. Se retiran de ambos márgenes las fichas que representan los factores.

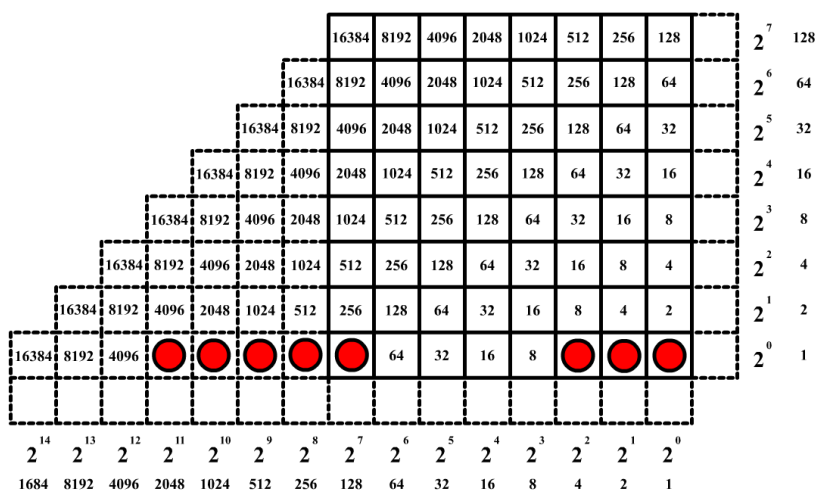




Paso 4. Deslizamos todas las fichas en el tablero, a lo largo de sus líneas de equivalencia, hasta la fila horizontal inferior.



Paso 5. Se reducen las fichas de la fila horizontal inferior de derecha a izquierda: cambiando dos fichas en un cuadrado por una en el cuadrado de su izquierda. Este proceso puede provocar una "reacción en cadena" hacia los cuadrados de la izquierda.



Paso 6. Convirtiendo el resultado binario en un número decimal se obtiene el resultado final.

$$53 \times 75 = 2048 + 1024 + 512 + 256 + 128 + 4 + 2 + 1 = 3975$$

#### 5.4. División

Para la división vamos a utilizar el proceso contrario al realizado en las multiplicaciones.

Ejemplo 1: Vamos a calcular el cociente y el resto entre 60 y 7.

Se transforman los números a valores binarios:

$$60 = 32 + 28 = 32 + 16 + 12 = 32 + 16 + 8 + 4 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2$$

$$7 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0$$



el cociente, en este caso 8, y el resto es el número que aparece en el margen inferior, 4.

$60 : 7 = 8$  y de resto 4.

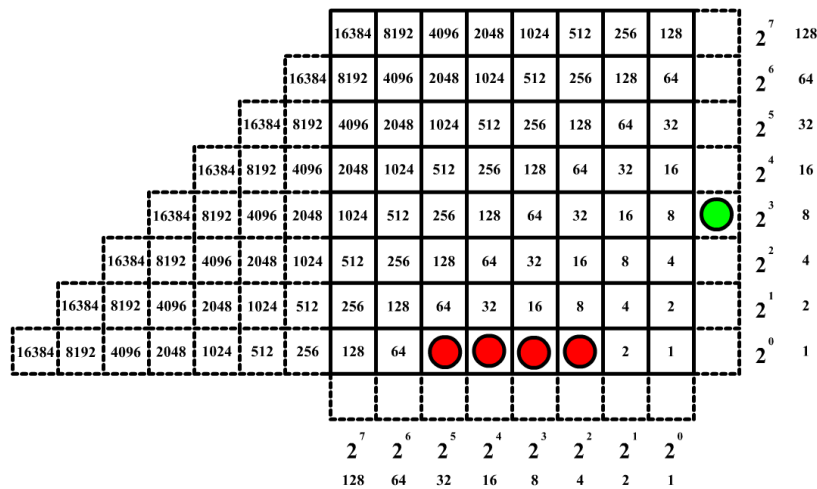
Ejemplo 2: Hagamos ahora la división de 60 entre 8.

Se transforman los números a valores binarios:

$$60 = 32 + 28 = 32 + 16 + 12 = 32 + 16 + 8 + 4 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2$$

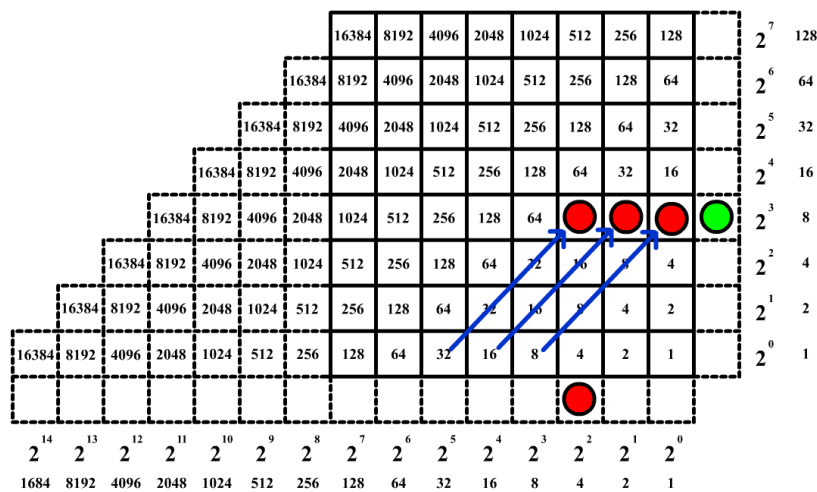
$$8 = 2^3$$

Paso 1. Colocamos las fichas del dividendo en la primera fila horizontal inferior y las del divisor en el margen vertical.



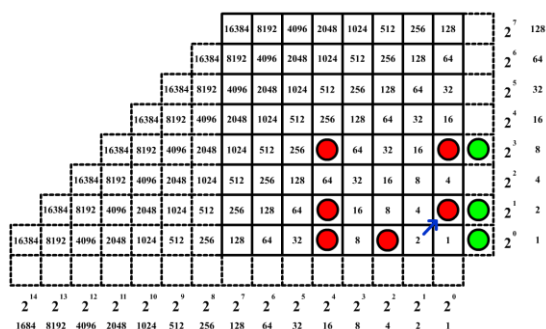
Paso 2. Repartimos las fichas del dividendo (60) entre la única fila ocupada por el divisor (8), mediante movimientos en diagonal hacia la derecha. Movemos las tres fichas de valor 32, 16 y 8 y las colocamos en las filas del divisor 8.

La ficha de valor 4 del dividendo no se puede colocar en la fila del 8 por lo sobra y la bajamos al margen horizontal inferior.

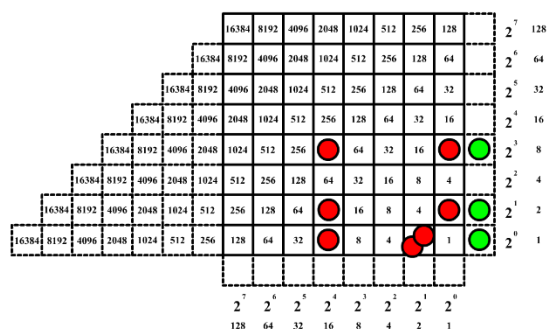


Nos quedan tres columnas (del 4, del 2 y del 1) análogas a la del divisor por lo que su suma indica cuántas veces contiene el dividendo (60) al divisor (8), es decir el cociente, en este caso  $2^2 + 2^1 + 2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$  y el resto es 4.

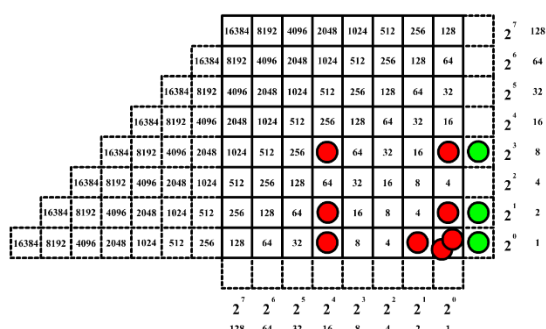




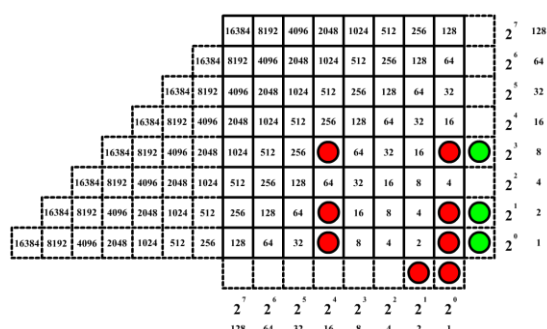
Movemos en diagonal la ficha de valor 2 y la colocamos en la fila del divisor 2.



Duplicamos la ficha de valor 4 en dos de 2 y las movemos un cuadro a la derecha.



Una de las fichas de valor 2 la duplicamos en dos de 1 y las movemos un cuadro a la derecha.



Hemos repartido las fichas del dividendo entre las fichas del divisor y nos han sobrado una ficha de valor 2 y otra de valor 1.

Las columnas (del 16 y del 1) con fichas del dividendo que son análogas a la del divisor nos dan el cociente, en este caso  $2^4 + 2^0 = 16 + 1 = 17$  y el resto lo indican las fichas que sobran, 3.

$$190 : 11 = 17 \text{ y de resto } 3.$$

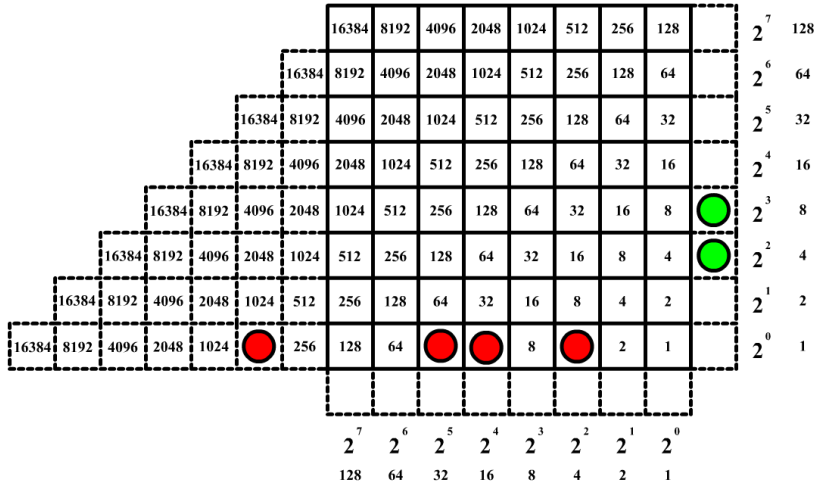
**Ejemplo 4:** Vamos a calcular el cociente y el resto de 564: 12.

Se transforman los números a valores binarios:

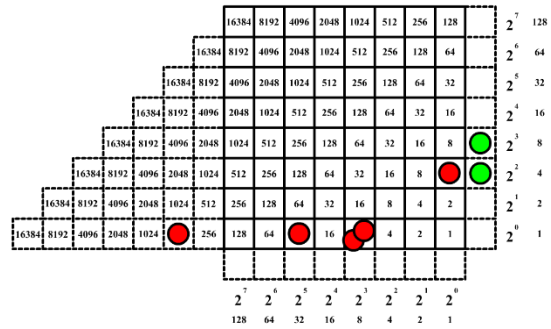
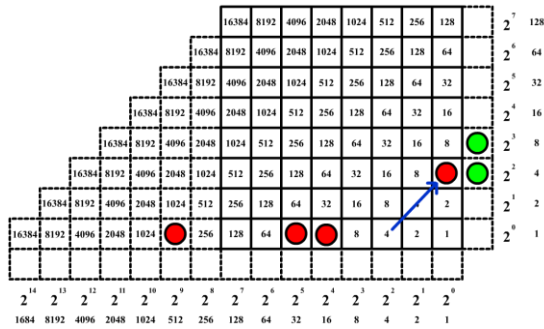
$$564 = 512 + 52 = 512 + 32 + 20 = 512 + 32 + 16 + 4 = 2^9 + 2^5 + 2^4 + 2^2$$

$$12 = 8 + 4 = 2^3 + 2^2$$

Paso 1. Se colocan las fichas del dividendo (564) en la primera fila horizontal inferior y las del divisor (12) en el margen vertical.

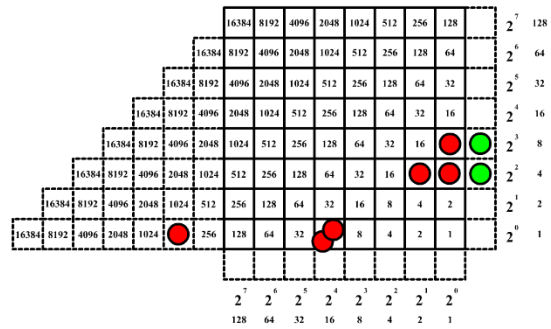
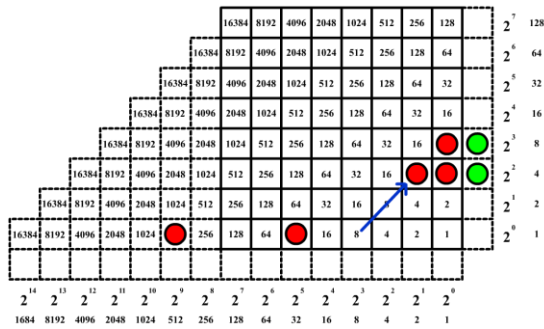


Paso 2. Tenemos que repartir las fichas del dividendo (564) entre las filas ocupadas por las fichas del divisor (8 y 4). Lo hacemos paso a paso:



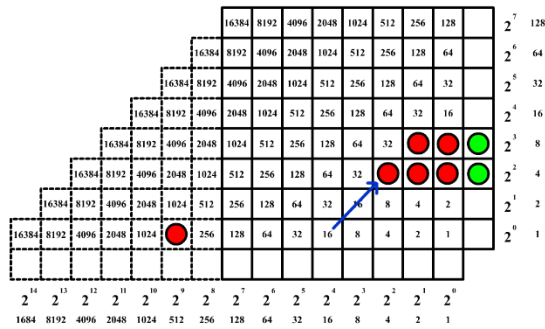
Movemos en diagonal hacia la derecha la ficha de valor 4 y se coloca en la fila del divisor 2.

Duplicamos la ficha de valor 16 en dos de 8 y las colocamos un cuadro a la derecha.

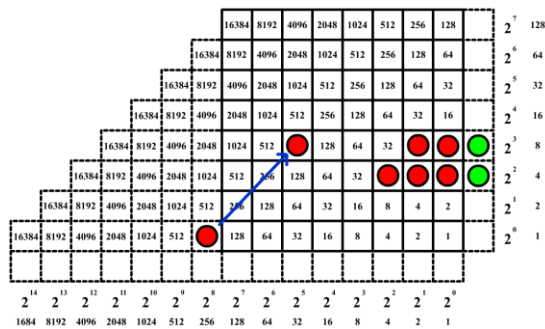


Movemos en diagonal hacia arriba las dos fichas de valor 8 y las ponemos en las filas de los divisores 8 y 4.

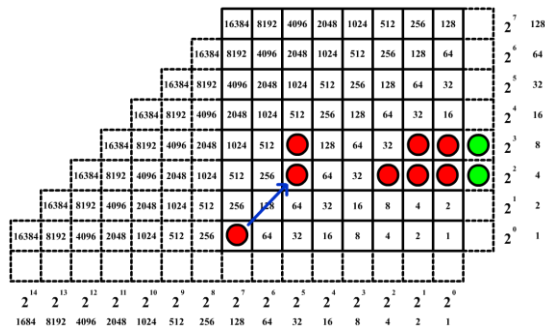
Duplicamos la ficha de valor 32 en dos de 16 y las situamos un cuadro a la derecha.



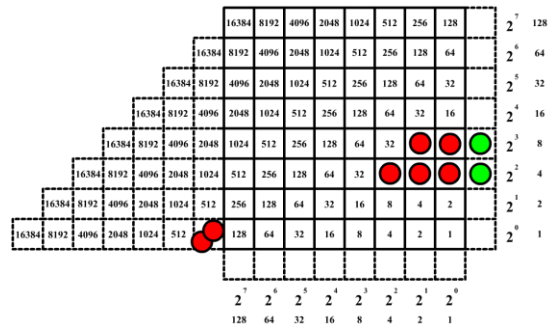
Movemos en diagonal hacia la derecha las dos fichas de valor 16 y las colocamos en las filas de los divisores 8 y 4.



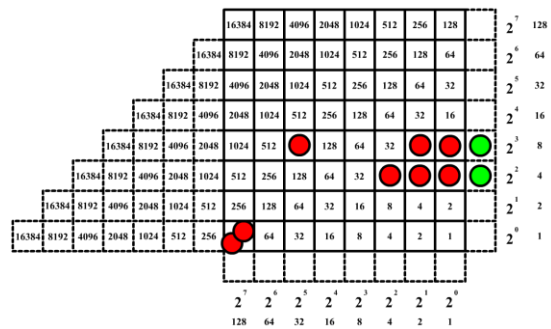
Una de las fichas de valor 256 la movemos en diagonal derecha y la colocamos en la fila del divisor 8.



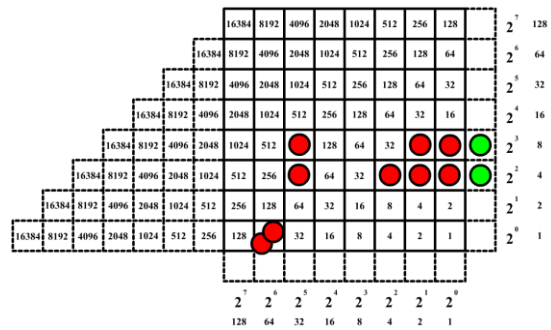
Movemos en diagonal hacia la derecha una de las fichas de valor 128 y la colocamos en la fila del divisor 4.



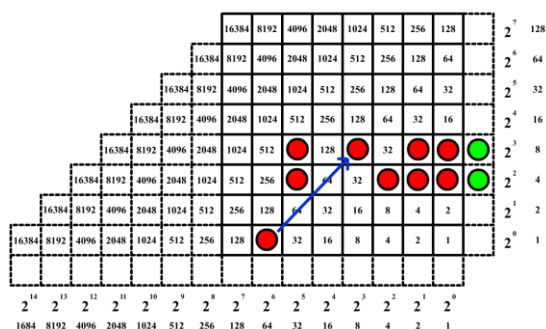
Duplicamos la ficha de valor 512 en dos de 256 y las movemos un cuadro a la derecha.



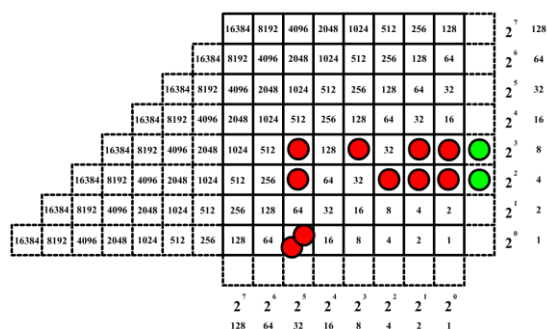
Duplicamos la otra ficha de valor 256 en dos de 128 y las situamos un cuadro a la derecha.



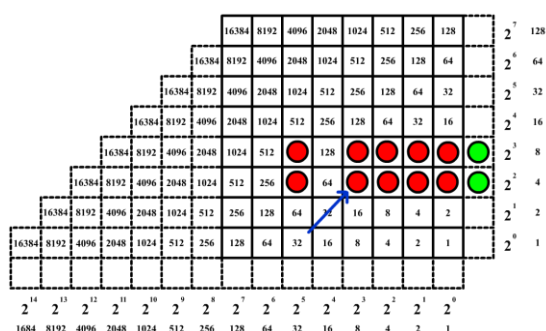
Duplicamos la otra ficha de valor 128 en dos de 64 y las movemos un cuadro a la derecha.



Movemos en diagonal una de las fichas de valor 64 y la colocamos en la fila del divisor 8.



Duplicamos la otra ficha de valor 64 en dos de 32 y las movemos un cuadro a la derecha.



Movemos en diagonal hacia arriba las dos fichas de valor 32 y las colocamos en las filas de los divisores 8 y 4.

Al no sobrar ninguna ficha, la división de 564 entre 12 es exacta y su cociente nos lo indican las columnas con fichas iguales a las del divisor.

$$2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = 47$$

$$564 : 12 = 47 \text{ y de resto } 0.$$

### 5.5. Raíces cuadradas

La radicación es una operación inversa a la potenciación. La raíz cuadrada de un número es la operación inversa al cuadrado de otro valor numérico.

Para calcular la raíz cuadrada de un número entero positivo con el ábaco de tablero de ajedrez de Neper, hay que ir colocando fichas sobre él para formar con ellas un cuadrado cuya diagonal sean celdas de la diagonal principal del tablero y cuyos lados tengan dos, tres o más casillas según valga el radicando.



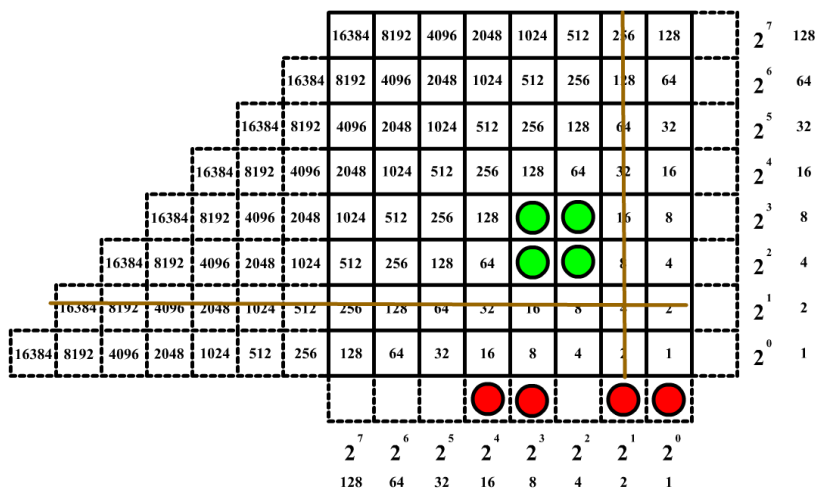




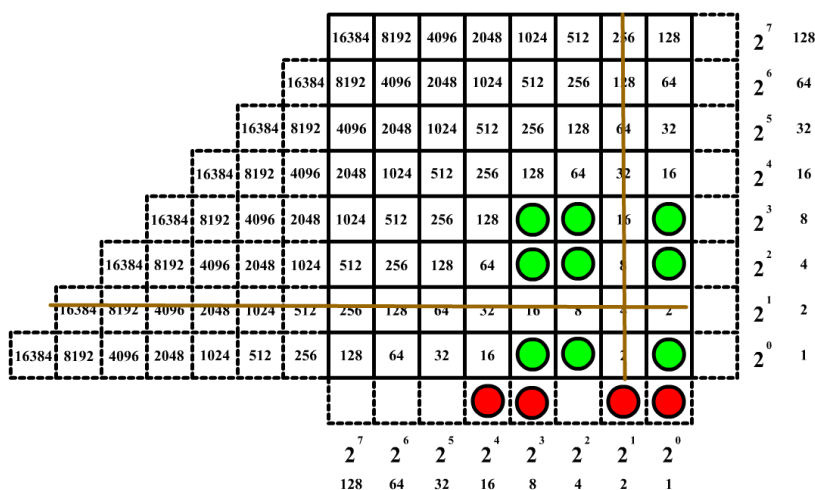








Paso 7. Seguimos bajando por la diagonal principal y llegamos al 1, que tiene encima y a la izquierda los valores 4 y 8. La suma de  $1 + 4 + 8 + 4 + 8 = 25$ , menor que el nuevo radicando (27). Colocamos una ficha sobre cada uno de los valores de la suma.



Al radicando 27 le restamos la suma 25 y nos da 2. Como hemos terminado de recorrer la diagonal principal, la última diferencia obtenida es el resto de la operación.

Hemos formado el cuadrado. El resultado de la raíz es la suma de los valores de las celdas del margen vertical que tienen fichas.  $2^3 + 2^2 + 2^0 = 8 + 4 + 1 = 13$  y nos ha dado un resto de 2.

La raíz cuadrada de 171 es 13 y de resto 2.

## 6. Bibliografía

<https://archive.org/details/rabdologiasunu00napi/page/n3/mode/2up>

<https://www.napiermaths.com/index.html>

<https://www.maa.org/book/export/html/1634262>

<https://animandolaweb.blogspot.com/2016/11/abaco-de-napier.html>

<http://www.librosmaravillosos.com/Napier/index.html>

[https://wikioes.icu/wiki/Location\\_arithmetic](https://wikioes.icu/wiki/Location_arithmetic)

<https://www.explodingdots.org/station/I11S11B>

<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/john-napiers-binary-chessboard-calculator-simplified>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Location\\_arithmetic#:~:text=Napier%20proceeded%20to%20the%20rest,based%20on%20doubling%20and%20halving.](https://en.wikipedia.org/wiki/Location_arithmetic#:~:text=Napier%20proceeded%20to%20the%20rest,based%20on%20doubling%20and%20halving.)

Simulador

<https://courses.cs.vt.edu/~cs1104/Napier/Chessboard.multiply.html>