

MÁS ALLÁ DEL TRES EN RAYA¹

José Muñoz Santonja

Juan Antonio Hans Martín

Antonio Fernández-Aliseda Redondo

1. Un juego milenario.

Hoy en día las nuevas generaciones son nativos digitales y ya desde pequeños los tiernos infantes manejan utensilios electrónicos con una facilidad que jamás tendremos los pertenecientes a generaciones pre-digitales. Eso ha modificado también el tipo de juegos que desde pequeños se maneja. Es cada vez más corriente ver como para entretener a algún pequeño que está dando la lata en público se le entrega un móvil para que lo trastea, antes de entregar un juego analógico de los que se han utilizado desde la antigüedad para tener distraídos a cualquier persona.

Para los que somos de generaciones anteriores, incluso algunos anteriores a los ordenadores personales, uno de los juegos que se aprendían en la infancia era el del tres en raya. Un interesante juego de estrategia que sería la puerta de entrada a este tipo de juegos.

Solía ser de los primeros juegos en aprenderse por su sencillez en la explicación y su facilidad para jugarlo en cualquier lugar. Basta un simple papel donde dibujar una cuadrícula 3x3 y un lápiz para poner cruces ó ceritos y poder comenzar a jugar inmediatamente. El juego es fácil, rápido y entretenido pues enseguida nos interesa ganar al contrario y a ello nos dedicamos con fervor.

Este juego, además, es muy útil para comenzar a investigar y estudiar las estrategias que pueda tener el juego, bien para ganar o mejor para empatar, ya que es un juego, al menos en papel, cuya mejor estrategia es conseguir tablas.

Este juego es también uno de los más antiguos, aunque los especialistas no se ponen muy de acuerdo sobre su nacimiento. Para unos su historia se remonta hasta el siglo V después de Cristo, hasta la lejana y antigua Persia, de donde pudo ser expandida por los mercadores italianos. Hay sin embargo investigadores que lo hacen remontar al antiguo Egipto, casi siglo y medio antes de Cristo, donde se han encontrado tableros con líneas y cruces que son similares al tablero estándar del tres en raya. Este juego es también uno de los más extendidos en el mundo, recibiendo diferentes nombres según el país, así se puede conocer con tic-tac-toe, tatei, el gato, ceros y cruces y más.

Se considera que un desconocido matemático genovés, Rufino Alberdi, fue el primero en hacer un estudio del juego relacionándolo con el cálculo de probabilidades, con poco éxito. Planteó un total de 765 posibles jugadas distintas y llegó a afirmar que fue Averroes el primero que estructuró formalmente el juego, aunque de esto último no se ha conseguido constancia.

¹ Juego publicado en la desaparecida web de Divulgamat en junio de 2019.

Como curiosidad indicar que se considera a OXO el primer videojuego de la historia y que está basado en este juego. Fue creado en el año 1952 por Alexander Douglas, un estudiante en la Universidad de Cambridge.



Imagen 1: Imagen del juego OXO tomada de Wikipedia.

Un juego conocido desde la edad romana es el *Molino*, que se puede jugar en tableros para tres, seis nueve o doce fichas. El juego para nueve peones es también conocido como *Nines Men' Morris*. Este juego se encuentra recogido en el *Libro de Juegos* del rey Alfonso X El Sabio. La versión de tres peones es muy similar al tres en raya.

En este artículo queremos hablar de una versión del juego tradicional, pero también de algunos juegos basados en él y que son aplicaciones, algunas veces no evidentes, de las mismas reglas que se utilizan en el juego base. Vamos a plantear todos los juegos utilizando tableros y fichas de distintos color para recrear las variaciones del juego.

2. Juego de tres en línea.

El juego de tres en raya se suele referir al que se realiza con lápiz y papel sobre una cuadrícula con x y o, aunque también se pueden encontrar tableros comercializados de 3x3 cuyas fichas son precisamente esas x y círculos. Nosotros vamos a estudiar el equivalente con tablero y fichas, en cuyo caso suele nombrarse como tres en línea.

2.1. Juego tradicional.

Se juega en un tablero con nueve casillas unidas horizontal, vertical y diagonalmente como el de la figura.

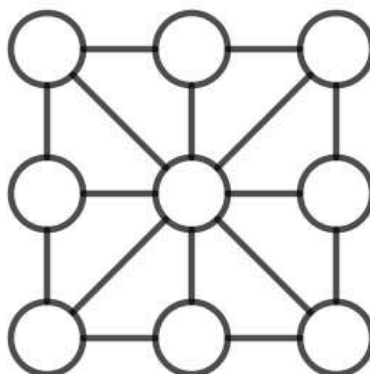


Figura 1: Tablero del tres en línea.

Tableros muy similares al anterior se han encontrado grabados en piedra en excavaciones romanas, pues en la antigua Roma era muy popular un juego llamado *Terni Lapilli* prácticamente igual al que vamos a estudiar aquí.

El juego está pensado para dos jugadores, cada uno de los cuales tiene tres fichas, de distinto color que el contrario

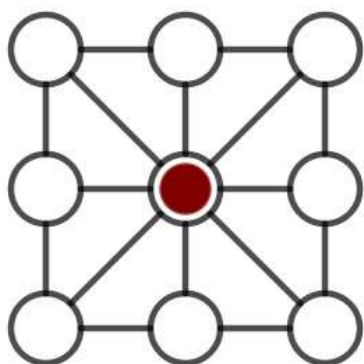
Por turno, los jugadores van colocando una de sus fichas en una de las casillas vacías hasta colocar todas las fichas.

El objetivo es conseguir colocar las tres fichas de un jugador en línea, sea horizontal, vertical o diagonal, el primer jugador que lo logra gana el juego.

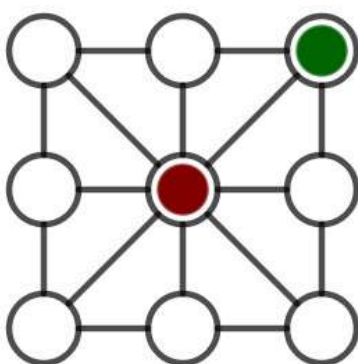
Lo normal es que una vez colocadas las seis fichas no se haya conseguido tres en línea, entonces se pasa a una segunda fase. De nuevo cada jugador en su turno puede mover una de sus fichas a una casilla vacía y adjunta a donde se encontraba, es decir, no es posible levantar la ficha del tablero, sólo desplazarla a una casilla vecina libre.

Con esta condición, el juego se convierte en un juego de estrategia ganadora, es decir, uno de los jugadores puede ganar siempre, haga lo que haga el contrario.

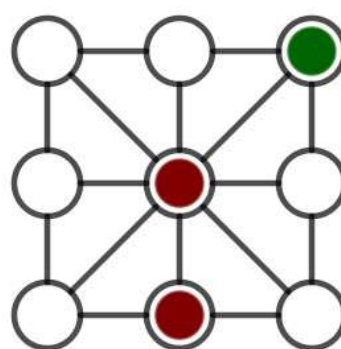
Vamos a ver el desarrollo de una partida para ver cómo se consigue ganar siempre. La estrategia ganadora es para el primer jugador colocando su primera ficha en el centro del tablero (paso 1).



Paso 1



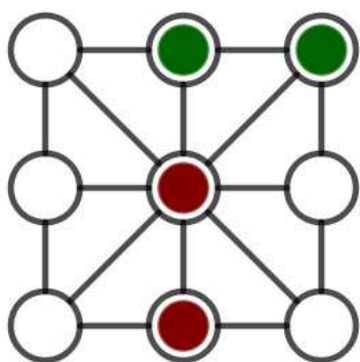
Paso 2



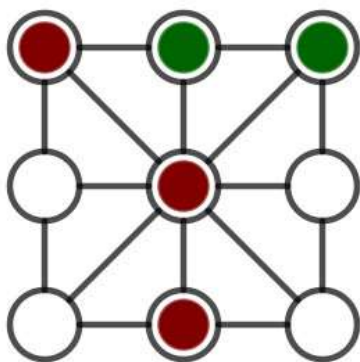
Paso 3

Como el tablero es simétrico, el segundo jugador sólo puede hacer dos movimientos diferentes, colocar una ficha en un extremo o en el centro de uno de los lados. Vamos a hacer el estudio suponiendo que el segundo jugador coloca su ficha en un extremo (paso 2). El primer jugador coloca su ficha formando una línea horizontal o vertical con la del centro, por ejemplo, la que vemos en el paso 3 (si numeramos de forma intuitiva las casillas del 1 al 9, la segunda ficha del primer jugador puede ir a la casilla 4 u 8 como en la imagen).

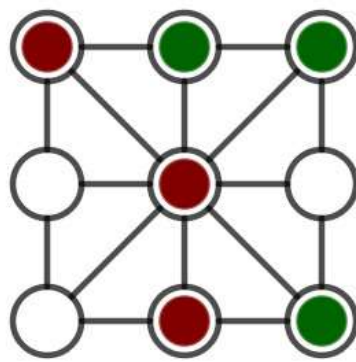
El segundo jugador debe jugar obligatoriamente su ficha a la posición 2 pues sino el primer jugador ganaría en su turno (paso 4). El primer jugador coloca la ficha en la casilla 1 (paso 5) lo que obliga al segundo jugador a jugar en 9, para que en la siguiente jugada no gane el primer jugador (paso 6).



Paso 4

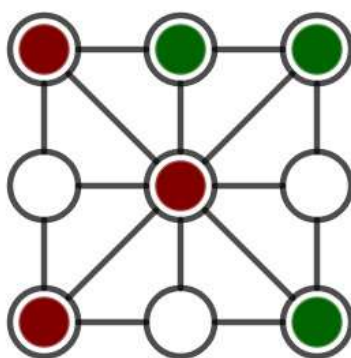


Paso 5



Paso 6

Una vez colocadas todas las fichas se comienzan a mover. El primer jugador tiene dos jugadas suyas para conseguir tres en línea, independientemente de lo que haga el contrario. En la siguiente jugada puede mover su ficha central o inferior hacia la izquierda como vemos en el paso 7.



Paso 7

Independientemente de la ficha que mueva el segundo jugador, el primero en su turno consigue tres en línea.

Dejamos a nuestros queridos lectores el estudio similar para el caso de que el segundo jugador coloque su primera ficha en el centro de un lado.

Cabe la posibilidad de modificar la última regla del juego de forma que la ficha pueda levantarse el tablero, pero en ese caso es mucho más complicado ver si existe estrategia ganadora o simplemente se llega a un empate técnico.

2.2. Variaciones del tres en línea.

Hay multitud de versiones de este juego cambiando las instrucciones y las estrategias.

2.2.1. Hay una versión que se juega a intentar no hacer línea de fichas. Se suele conocer como **Anti-k Raya o Tres en línea inverso**, también se conoce, en el mundo anglosajón, como el modo *Misere*. Este modo consiste en que el primero que hace una línea de k fichas pierde.

2.2.2. También se ha planteado generalizaciones más complicadas, por ejemplo, la que se conoce como $m \times n \times k$ en la que hay conseguir una línea de k peones en un tablero de $m \times n$.

2.2.3. En el artículo de la bibliografía hemos encontrado otros métodos basados en este juego, por ejemplo, el **tres en raya cuádruple**. Se juega sobre un tablero formado por cuatro tableros simples de tres en raya, y cada jugador tiene cinco fichas. El primero en conseguir tres en línea gana. Aunque sobre este juego no hemos conseguido más información. También existe un tres en raya quíntuple.

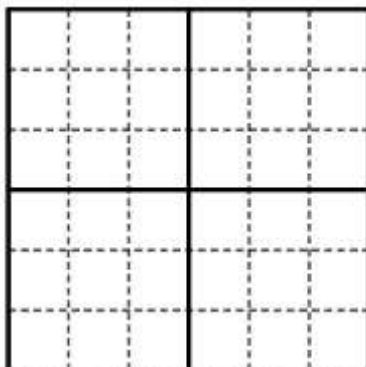


Figura2: Ejemplo de tablero de 3 en raya cuádruple.

2.2.4. Existe una variación de este juego llamado **Notakto**, también conocido como **Tic-Tac-Toe imparcial**, que se juega en varios tableros de 3x3 y ambos jugadores juegan con el mismo símbolo, por ejemplo x. Cada vez que en uno de los tableros se consigue tres en línea, ese tablero se considera completo y se pasa al siguiente. El último jugador que logra un tres en línea en el último tablero pierde la partida. Este juego fue creado en 2010 por el profesor Bob Koca y tiene que la característica de que no puede acabar en empate, como el tres en raya clásico.

2.2.5. Hay otro juego que podríamos traducir por **tres en raya salvaje**, en el que se juega igual que el tradicional, con **o** y **x**, pero cada jugador, en su turno, puede decir poner una **x** o un **o**. Gana el jugador que consigue tres en línea, o bien se puede jugar al modo inverso en el que quien termina una línea de tres elementos iguales pierde.

2.2.6. Existe otra versión que traduciríamos por **tres en raya aleatorio**, en él, en cada jugada se lanza una moneda y según que salga cara o cruz juega uno de los dos jugadores, el que corresponda con la opción aparecida.

2.2.7. Hay una versión deformada del tres en raya llamado **Treblecross**. Este juego se realiza sobre una sola línea de n casillas y está pensado para dos jugadores.

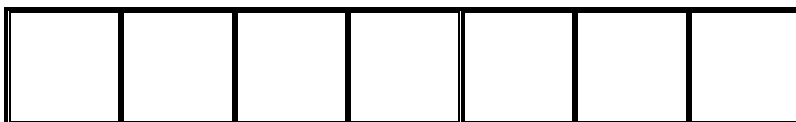


Figura 3: Ejemplo de tablero para Treblecross

Ambos jugadores juegan con el mismo símbolo, por ejemplo x, y van colocando, en su turno, una marca en una de las casillas vacías. Gana el jugador que consigue colocar tres símbolos seguidos.

Es fácil estudiar la estrategia ganadora. Por ejemplo, en el tablero de muestra gana el primer jugador como máximo en su tercer turno. Pero lo interesante

para los alumnos es estudiar cuál es la estrategia según el número de casillas, pues según el valor de n gana el primero o el segundo jugador.

- 2.2.8. Hay versión llamada en inglés **Quick – tac – toe** (recordemos que en América el juego se conoce como Tic-Tac-Toe) en la que se juega sobre el tablero de 3×3 y cada jugador, en su turno, puede marcar todas las casillas que quiera del tablero, siempre que estén en la misma fila o columna. Gana el jugador que marca la última casilla libre del tablero. Este juego se sale un poco de los anteriores ya que el objetivo no es conseguir tres en raya.

2.3. Tripas: evitando el empate.

El hecho de tener una estrategia ganadora o, según como se juegue, no perdedora, hace que al jugar muchas veces se termine convirtiendo en previsible y llegue a cansar. Para ello lo mejor es ampliar las posibilidades que se tienen sobre el tablero y ofertar más variaciones para ganar.

Entre este tipo de juego que podemos encontrar se encuentra el que se conoce como *Tripas* cuyas instrucciones son básicamente las mismas que el tres en línea, pero se juega con un tablero especial y con cuatro fichas cada jugador. En ese tablero hay casillas coloreadas, de forma que hay tres casillas del mismo color en tres colores diferentes. En la imagen vemos una versión de ese tablero. Se consideran que las casillas de un mismo color equivalen a una diagonal ampliada y paralela a la central.

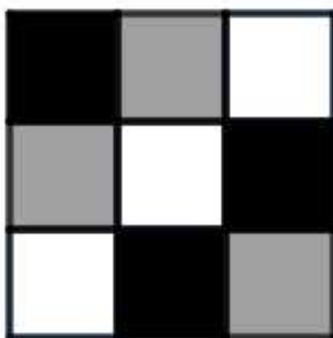


Figura4: Tablero para el juego Tripas.

Los jugadores, en su turno, van colocando una de sus tres cuatro sobre el tablero. Gana el jugador que consigue alinear sus tres fichas en horizontal, vertical o diagonal, o conseguir que sus tres fichas estén en casillas del mismo color.

Una vez colocadas las seis fichas, si nadie ha conseguido su objetivo, los jugadores pueden, en su turno, mover una de sus fichas, sin levantarla del tablero, hasta una casilla adjunta vacía. Se continúa hasta que algún jugador consigue sus tres en línea o color o hasta que se acuerde tablas.

La pregunta interesante aquí es, ¿existirá una estrategia ganadora tal como hemos visto en el tradicional tres en línea?

En el libro tercero de Adrian Paenza de su colección *Matemática... ¿Estás ahí?*, muestra este juego, tomado de un artículo de Martin Gardner, entre otros, y explica que es un juego donde nunca se empata y no tiene preeminencia quien toma la casilla central. Es

más, desarrolla la estrategia para jugar y comprueba que si el primer jugador no coincide ganar en sus cuatro primeras jugadas, gana el segundo jugador.

3. Juegos fundamentados en el tres en raya.

Hay muchos juegos que, aunque a simple vista no lo parezcan, su fundamento y su estrategia están basados en el tres en raya, o dicho más claramente, para ganar en ese juego hay que trabajar como si estuviésemos en un tablero del tres en raya y son sus mismas reglas. Vamos a ver algunos de ellos.

3.1. El Quincesuma.

Este es un juego de tablero para dos jugadores, cada uno de ellos juega con tres fichas, de distinto color para cada jugador, sobre un tablero lineal con los números del 1 al 9.



Figura 5: Tablero del Quincesuma.

El desarrollo del juego es el siguiente:

- Cada jugador, en su turno, coloca una de sus fichas sobre una de las casillas que estén vacías. No puede haber más de una ficha en una casilla.
- Gana el jugador que la suma de los números de las casillas en que estén sus tres fichas sumen 15.
- Si al colocar las seis fichas ningún jugador ha conseguido sumar 15 con las casillas elegidas, los jugadores, en su turno correspondiente, pueden tomar una de sus fichas y cambiarla a una casilla vacía.

Si, después de haber jugado varias partidas, se comienza a estudiar el juego y a buscar posibles estrategias, no es muy complicado llegar a la conclusión de que este juego equivale a jugar al tres en raya sobre un tablero que es, en realidad, un cuadrado mágico. Es decir, sería como jugar con las instrucciones originales sobre el tablero siguiente:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 6: Tablero equivalente al Quincesuma

La diferencia fundamental sería que en esta versión, la ficha, una vez colocada, no solo está restringida a ser desplazada, si no que es posible levantarla del tablero para colocarla en una casilla vacía.

3.2. Scrabble numérico.

Existe un juego similar al anterior, y cuya estrategia es la misma, que se suele traducir por Scrabble numérico, aunque también se le conoce por Pick15 (algo así como coger 15).

Se dispone de los números del 1 al 9 y cada jugador en su turno elige un número de los existentes. Una vez que un jugador elige un número, ese número no puede volver a ser elegido. Gana el jugador que consigue sumar 15 con tres de los números que ha elegido. Si se recogen todos los números y nadie lo consigue, la partida acaba en tablas.

3.3. Tres en raya numérico.

El matemático Ronald Graham, conocido por ser la persona que popularizó el conocido como Número de Erdős, creó esta nueva versión en la que un jugador juega con los números impares desde 1 hasta 9, y el otro jugador juega con los pares.

Se juega en un tablero de 3x3 y cada jugador, en su turno, coloca uno de sus números, que no puede volver a repetirse, en el tablero. Gana el jugador que consigue sumar 15 con tres números que estén en línea.

3.4. Trio de palabras.

En el año 1975, el matemático canadiense Leo Moser, publicó un juego al que llamó HOT, para dos jugadores que jugaban con nueve tarjetas, cada una de ellas con una palabra distinta escrita en ella. Lógicamente, como veremos en su desarrollo, según el idioma en que se juegue hay que utilizar distintas palabras para que tenga sentido el juego.

Como veremos es básicamente lo mismo que hemos llamado antes como Scrabble numérico, pero utilizando palabras en lugar de números. Lo usual es que los propios jugadores pueden preparar el juego cortando cuadrados de papel y escribiendo las palabras en ellos, eso sería lo único que se necesita para el juego.

En este juego, se tienen sobre la mesa, a la vista, nueve tarjetas con las siguientes palabras.

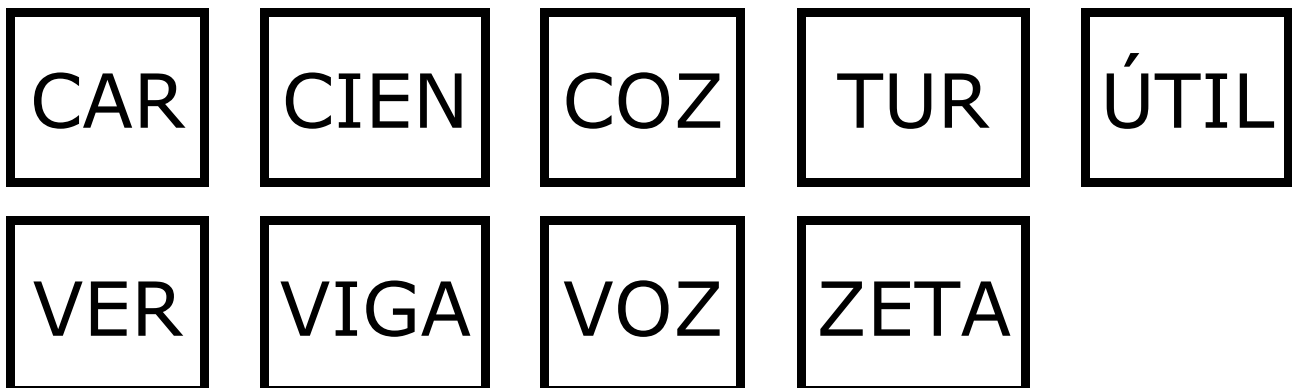


Figura 7: Tarjetas para el juego Trio de Palabras.

Cada jugador en su turno elige una tarjeta del montón. Gana el jugador que consigue reunir tres palabras que tengan una letra en común.

Investigando el juego, basta ver cuáles letras se repiten y consiguen obtener el objetivo fijado. Haciendo un estudio exhaustivo de las posibilidades de ganar que existen, se llega a la conclusión de que este juego es isomorfo al tres en raya original, el que se juega llenando el tablero de ceros y cruces, pero jugado sobre el siguiente tablero de 3x3.

CAR	COZ	CIEN
TUR	ZETA	ÚTIL
VER	VOZ	VIGA

Figura 8: Trio de palabras como tablero.

No cuesta mucho ver, que una buena estrategia es conseguir la tarjeta con la palabra *zeta* pues es la que aparece en más tríos de palabras, y a partir de ahí hay que ir buscando conseguir alguno de los tríos posibles.

4. El salto a la tercera dimensión.

Como hemos comentado, el juego del tres en raya es muy corriente y uno de los primeros con que se comienza a jugar y a buscar estrategias. Esto lleva a que sea fácil encontrarlo comercializado en multitud de materiales, especialmente en madera, pero también en plástico, metacrilato, metal o incluso cristal.

Como la industria del juego ha intentado ir siempre un poco más allá, ha inventado juegos y comercializados juegos muy variados. Algunos de ellos juegan con la tridimensionalidad, bien en el tablero o en las fichas que se utilizan.

De esta forma, es posible encontrar el juego de tres en raya en tres dimensiones, normalmente son una trama de varillas en las que se insertan unas bolas hasta conseguir tres en línea en cualquier dirección del espacio. También se comercializa para cuatro y hasta cinco en línea. En particular, en la década de los años 60 del pasado siglo, se comercializó un juego llamado Qubic que era un cuatro en raya tridimensional. Ya en 1975 se creó un juego de ordenador para simularlo.

Pero vamos a presentar dos juegos que se caracterizan porque las fichas son tridimensionales, en concreto cubos, que tienen en cada cara símbolos diferentes y que

para conseguir ganar hay que mover los cubos o girarlos para conseguir otro símbolo distinto del que tenía.

4.1. Tria

El juego **Tria** es una versión del tres en raya que tiene la característica de que las fichas son cubos teniendo en cada cara un símbolo diferente, que se repiten en todos los cubos.

Es un juego para dos jugadores, cada uno de ellos tiene tres cubos, de distinto color por jugador, con seis símbolos diferentes en las seis caras.

Se comienza la partida colocando alternos los cubos de cada jugador en dos líneas opuestas. Es decir, los jugadores no comienzan a colocar sus cubos, sino que se parte ya con los cubos colocados. Se colocan de forma que estén a la vista los seis símbolos distintos.



Imagen 2: Ejemplo de colocación para comenzar con Tria.

Las instrucciones del juego son las siguientes:

Cada jugador, en su turno, puede hacer sólo dos movimientos.

- 1) Desplazar un cubo a una casilla vacía, tanto horizontal, vertical como diagonalmente, teniendo en cuenta que no se puede saltar sobre otro cubo ni mover otro cubo al desplazarse. El cubo puede ser suyo o del contrario.
- 2) Girar uno de sus propios cubos, sin moverlo del sitio, para cambiar el símbolo que muestra la cara superior.

Hay una restricción. Un jugador, en su turno, no puede mover o girar un cubo que el contrario haya desplazado en la jugada anterior, aunque sea un cubo suyo. El cubo que se desplaza de su casilla a otra vacía tiene que saltar un turno antes de volver a ser utilizado.

Gana el jugador que consigue alinear tres cubos con el mismo símbolo. Los dados no tienen que ser necesariamente todos de ese mismo jugador.

4.2. Quixo.

Otro juego similar, creado por Thierry Chapeau, está comercializado con el nombre **Quixo** por la empresa Gigamic. Es un juego que permite jugar dos o cuatro jugadores, formando dos equipos.

Se tienen 25 cubos cuyas caras están en blanco o tienen un aspa o un círculo, los símbolos con los que van a jugar los dos jugadores. Inicialmente están puestos formando un cuadrado de 5x5 con todas las caras superiores en blanco.

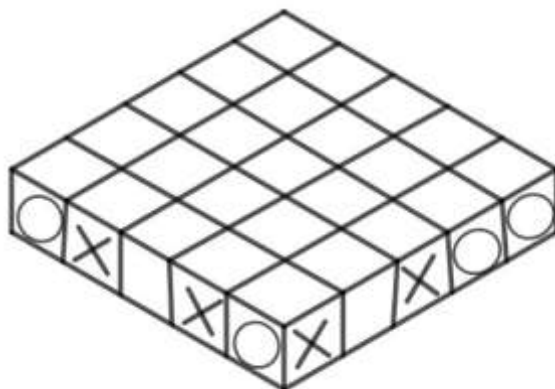


Figura 9: Distribución inicial del Quixo.

Cada jugador en su turno tiene que tomar un cubo que esté en la periferia. Ese cubo puede tener la cara superior blanca o con el símbolo de ese jugador, no puede tomar uno con el símbolo del contrario. Si toma uno en blanco, automáticamente lo convierte en uno con su símbolo, es decir, gira el cubo para que en la cara superior esté su símbolo.

Ahora debe colocar ese cubo de nuevo en la periferia, pero no puede colocarlo en el mismo sitio. Debe colocarlo al principio de la fila o columna al que pertenecía ese cubo arrastrando los demás hasta rellenar de nuevo todo el cuadrado.

En la imagen siguiente vemos un cubo que se ha separado de la periferia y las flechas indican los tres lugares en que se puede colocar ese nuevo cubo. Se empujan los cubos de esa línea para cerrar el hueco que se dejó.

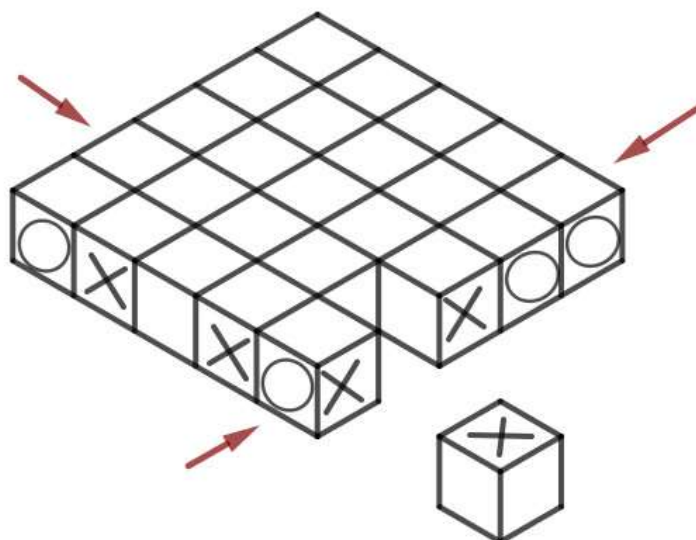


Figura 10: Posibilidades de juego.

Gana el jugador que consigue alinear cinco cubos con su símbolo, sea en horizontal, vertical o diagonal.

Lo que hemos visto es el juego comercializado, pero es interesante comenzar con un cuadrado de 3x3 para que la partida sea más rápida y así se acostumbra uno al juego con más facilidad.

En la siguiente página se encuentra un proyecto con el objetivo de programar este juego, aunque no he conseguido acceder al resultado.

http://www.math.uaa.alaska.edu/~afkjm/ai_games/quixo/quixo.html

4.3. ¡Viva el reciclaje!

Estos juegos que hemos visto son complicados de conseguir ya que no se encuentran con facilidad y solo en tiendas de juegos especializados. Y además su precio para comprar juegos para una clase sobrepasa el presupuesto de cualquier departamento.

Pero sin embargo, si somos aficionados al bricolaje, o disponemos de un aula de tecnología es posible construir un juego con facilidad. Podemos conseguir cubos de plástico de los puzles típicos de los niños pequeños y basta colocar pegatinas con los símbolos que necesitamos. O podemos conseguir cubos de madera si conocemos algún carpintero que pueda cortarnos los cubos a buen precio.

Por ejemplo, en el Tria basta colocar en cada cubo, en grande, las letras de la A a la F, y para diferenciar los dos jugadores, se utilizan colores diferentes, por ejemplo, para un jugador las letras en rojo y para otro las letras en azul o verde.

Para el Quixo, basta colocar en una cara del cubo un aspa y en la otra un círculo para que tengamos el cubo preparado para jugar.

5. Jugar digitalmente.

La mayoría de los juegos que hemos visto es posible jugarlos con muy pocos elementos o fáciles de conseguir. Sin embargo, en la era digital no podían dejar de estar adaptado muchos de ellos a los soportes digitales.

Como hemos dicho, el tres en raya fue el primer juego que se programó y además se utiliza en muchas ocasiones para comenzar en aspectos de programación. Por ello, no es extraño encontrar páginas donde poder jugar a estos juegos que hemos visto. Incluso se pueden encontrar app para móviles con estos juegos. Por ejemplo, existe una versión de Notakto para Android. En varias páginas se puede incluso encontrar las ordenes necesarias para programar esos juegos.

Aunque existe multitud de páginas donde poder jugar, sobre todo al tres en raya original, vamos a señalar algunas de ellas que hemos encontrado sobre algunos de los juegos que hemos presentado.

Varias versiones del tres en raya: <http://www.juegos.com/juegos/tres-en-rama>

Notakto: <http://thewessens.net/ClassroomApps/Main/notakto.html?topic=probability&id=8>

Tres en raya 3D: <http://www.isladejuegos.es/inteligencia/tres-en-raya-3d>

6. Referencias:

MARÍN MONTERO, C. (2010): "Colección de juegos infantiles. Las tres en raya".
Publicación del Museo del Juego localizable en la siguiente dirección, activa el
07/09/2018.

http://museodeljuego.org/wp-content/uploads/contenidos_0000000688_docu1.pdf

PAENZA, A. (2007): *Matemática...¿Estás ahí? Episodio 3,14*. Editorial S XXI, Argentina.

Enlace al libro en pdf, activo el 07/09/2018

<http://cms.dm.uba.ar/material/paenza/libro3/libro-e314.pdf>

Es posible encontrar referencia a las variaciones que hemos visto en el artículo y muchas más en la siguiente dirección, activa el 07/09/2018.

https://en.wikipedia.org/wiki/Tic-tac-toe_variants

Instrucciones del juego Quixo, enlace activo el 08/09/2018:

<http://www.foxmind.co.il/uploads/70213732698722edfaf.pdf>