JUEGOS DE ESTRATEGIA CON NÚMEROS[1]

José Muñoz Santonja
Antonio Fernández-Aliseda Redondo
Juan Antonio Hans Martín

1. Introducción.

A finales de la década de los setenta del pasado siglo, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) propuso que “la resolución de problemas ha de ser el centro de la enseñanza de las matemáticas en los años 80”. Desde entonces, la resolución de problemas ha sido un pilar fundamental de la enseñanza de las matemáticas. Tenemos que recalcar que entendemos como problema toda situación para cuya resolución no se tenga un algoritmo claro de aplicación y haya que utilizar distintas caminos y estrategias para llegar a la solución, que en algunos casos puede no ser única.

Los ejercicios repetitivos, como los mal llamados problemas algebraicos, consisten en una repetición de una serie de algoritmos preestablecidos cuya única dificultad estriba en conocer esos procedimientos rutinarios y haberlos practicado para aplicarlos a la situación que se nos presenta. Por el contrario, en los problemas debemos aplicar nuestros conocimientos, pero no conocemos ningún camino claro para llegar a la solución, por lo que es necesario utilizar una serie de razonamientos y de procedimientos, llamados heurísticos, que nos permiten afrontar su resolución.

A veces, se cae en la equivocación de pensar que estos procedimientos son innatos o que se pueden aprender con los ejercicios rutinarios de repetición que hacemos normalmente en clase. Los heurísticos para la resolución de problemas son técnicas que necesitan aprenderse y practicarse para poder ser aplicadas en nuevos problemas, teniendo presente que si el problema es igual a otros que hemos practicado, automáticamente pasa a ser un ejercicio habitual donde se reproduce, sin retos claros, lo ya aprendido. Y para aprender esos procedimientos hay métodos muy atractivos para el alumnado que pueden hacer salir de la rutina mediante planteamientos recreativos o cercanos a la vida cotidiana del alumnado.

En concreto, entre los elementos más potentes para atraer la atención de los alumnos suele estar los juegos matemáticos y particularmente los juegos de estrategia. Este tipo de juegos tienen la característica de que la mayoría de estrategias para resolverlos, en particular para conseguir ganar, sean individuales, por parejas, o con más jugadores, son las mismas que las que se utilizan en la resolución de problemas: particularizar, comenzar con planteamientos más simples, partir del problema resuelto y recorrer el camino inverso, etc.

Los juegos de estrategia tienen una componente que les dificultan ser aceptados con facilidad. Como no se ve claramente la aplicación matemática, ya que no aparecen conceptos matemáticos, como en los juegos de contenido, suele pensarse que son una pérdida de tiempo, a veces por parte del profesorado, pero también por el alumnado y sus progenitores. Cuando en clase jugamos con fichas y/o dados moviéndolas sobre un tablero, hay personas que no reconocen su potencialidad matemática sin darse cuenta

[1] Juego publicado originalmente en la desaparecida web de Divulgamat en diciembre de 2018.

que se están practicando los procedimientos para la resolución de problemas y estamos, por tanto, preparándolos para afrontar problemas no rutinarios, diferentes a los que se suelen repetir sin descanso en la mayoría de las clases. Por ello, es bueno explicar esta intencionalidad didáctica a los alumnos para su conocimiento y que revierta en el de sus padres.

En esta sección de juegos ya hemos afrontado en otras ocasiones juegos de estrategia utilizando gran variedad de recursos, pero queremos dedicar esta entrega a ver algunos juegos en los que se trabajan con números, por lo que, de entrada, pueden crear menos rechazo en algún sector del profesorado.

2. Llegar a cien.

Las normas de este juego son muy simples. Comienza un jugador diciendo un número del 1 al 10, el siguiente jugador, piensa otro número entre el 1 y 10, lo suma al número anterior dicho por el contrario y comunica el resultado. A partir de ahí, por turno, cada jugador elige un número entre 1 y 10 y se lo añade a la última suma anterior. Gana el primer jugador que consigue que la suma sea 100.

Veamos una estructura de una posible jugada.

1er jugador	2º jugador	Suma parcial
5		5
	8	13
9		22
	6	28
10		38
	8	46
5		51
	9	60
10		70
	7	77
7		84
	4	88
7		95
	5	**100**

En esta partida ganaría el segundo jugador, pues es quien consigue llegar hasta cien con su última suma.

Estudio del juego.

Este es un juego tradicional de lápiz y papel, donde se practica el cálculo mental y muy rápido de hacer, por lo que en poco tiempo los jugadores pueden jugar varias partidas. Además, siempre hay que contar con el deseo innato de ganar al contrario y más en un juego tan fácil de seguir, por lo que el interés por jugar suele ser alto.

Una vez que se han jugado varias partidas es el momento de que el profesorado plantee que este juego tiene estrategia ganadora y anime a los alumnos a buscarla.

Si no se ha utilizado anteriormente ningún juego con clara estrategia ganadora hay que explicarles a los alumnos en qué consiste, pues se pueden obtener planteamientos incorrectos o inacabados. Por ejemplo, si un participante ha perdido siempre que ha empezado tiende a pensar que el segundo jugador gana siempre, aunque no explique por qué.

Jugadas varias partidas es frecuente que cuando se plantee el buscar la estrategia enseguida salgan algunos alumnos indicando que consiste en llegar a 89. Es decir, han comprobado que cuando llegan a 89 ganan, independientemente de lo que haga el otro. Es el momento de hacerles ver que ese planteamiento es incompleto pues hay infinidad de posibilidades de llegar a 89 y si dependemos de lo que ponga el contrario para llegar ahí, eso no puede considerarse como estrategia ganadora.

Y aquí se aplica el proceso de partir del problema resuelto (en nuestro caso el juego acabado) e ir razonando hacia atrás, resolviendo problemas parciales. Cuesta poco plantearles qué hay que hacer para llegar a 89. De donde saldrá como respuesta que previamente hayamos dejado la cuenta en 78 y estudiando de nuevo hacia atrás, salen los distintos resultados que nos permiten ganar siempre: 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Por lo que el primer jugador, si dice 1 y después en cada jugada completa hasta 11 el número que haya dicho el contrario es seguro que gana, independientemente de lo que haga el contrario. Las posiciones ganadoras son: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 y 89, fáciles de recordar observando que salvo el 1 las demás son múltiplos de once, más uno.

Variaciones del juego.

Una vez encontrada la regla para ganar siempre, y para que les quede claro cómo es el procedimiento seguido, hay varias posibilidades de cambiar el enfoque, para que ya estudien las reglas para ganar sin necesidad siquiera de jugar, sino simplemente haciendo un estudio matemático de las nuevas opciones.

De esta manera, podemos plantear los siguientes retos basados en el juego anterior:

1) Supón que en el juego se pueden elegir números entre 1 y 15 y gana el que llega a 150, ¿cómo se modifica la estrategia en ese caso?
2) ¿Cómo cambia el juego si gana el que llegue a 100 pero sólo se pueden elegir números entre 5 y 10?
3) Si cambiamos la regla final y pierde el primero que llega o se pasa de 100, ¿cómo se modifica la estrategia ganadora?
4) Partimos del juego inicial, ¿qué cambios mínimos realizarías para que el ganador sea siempre el segundo?

   En esta opción, habría que estudiar todas las propuestas de los alumnos y ver cuáles tienen sentido o cuáles pueden ser las más interesantes.

   Si se juega con alumnado más joven o con menor nivel, que suponemos que no van a encontrar alternativas al juego, se les puede plantear directamente otras opciones, por ejemplo:

   a) ¿Qué ocurre si gana el primero que llega a 99? ¿Qué relación tiene este caso con el inicial?
   b) ¿Cómo cambia la estrategia si sólo se pueden elegir números de una cifra, es decir, entre 1 y 9?

3. Conseguir 31.

Este es un juego similar al anterior, cada jugador tiene que sumar un número a la suma parcial que haya hasta entonces, pero ahora la elección del número elegido para sumar va forzada mediante un dado.

Para este juego se necesita un dado cúbico así como lápiz y papel para sumar los números que se van eligiendo. La forma de jugar es la siguiente. El primer jugador lanza un dado y se anota el valor que ha quedado en la cara superior, que será el comienzo de la suma. El segundo jugador, y a partir de él cada uno de los dos jugadores, le da un cuarto de vuelta al dado, girando sobre una de las aristas de la cara que ha quedado sobre la mesa, quedando sobre una de las caras que había quedado a la vista sobre los lados del dado. Se añade a la suma el número que queda ahora en la cara superior del dado. Se continúa hasta que la suma llegue a 31.

Veamos el comienzo de una partida. Se lanza un dado y en la cara superior queda un 4. El primer jugador puede girar, sobre una arista, el dado y colocarlo en los valores 1, 2, 5 o 6. Supongamos que lo gira para obtener un 6. La suma parcial hasta el momento es 10. El segundo jugador voltea el dado y puede obtener los valores 2, 3, 4 o 5 y así sucesivamente.

Conviene aclarar con los participantes la última regla (“Se continúa hasta que la suma llegue a 31”). Si se considera en sentido amplio, que la suma sea mayor o igual que 31, el ganador puede ser diferente a si se considera en sentido estricto, que la suma sea exactamente igual a 31. Veamos con sendos ejemplos las dos situaciones que se pueden dar:

Ejemplo 1	Primer jugador		Segundo jugador		
Dado inicial	Valores posibles	Valor elegido	Valores posibles	Valor elegido	Suma
4	1, 2, 5, 6	6	-	-	10
	-	-	2, 3, 4, 5	5	15
	1, 3, 4, 6	6	-	-	21
	-	-	2, 3, 4, 5	2	23
	1, 3, 4, 6	1	-	-	24
	-	-	2, 3, 4, 5	2	26
	1, 3, 4, 6	6	-	-	32
	Gana el primer jugador porque $32 \geq 31$				

Ejemplo 2	Primer jugador		Segundo jugador		
Dado inicial	Valores posibles	Valor elegido	Valores posibles	Valor elegido	Suma
4	1, 2, 5, 6	6	-	-	10
	-	-	2, 3, 4, 5	5	15
	1, 3, 4, 6	6	-	-	21
	-	-	2, 3, 4, 5	2	23
	1, 3, 4, 6	1	-	-	24
	-	-	2, 3, 4, 5	2	26
	1, 3, 4, 6 No puede elegir 5	1	-	-	27

	-	-	2, 3, 4, 5	4	31
	Gana el segundo jugador al llegar exactamente a 31				

Aclarada con los jugadores la norma tenemos dos juegos diferentes.

Este juego se puede plantear directamente con lápiz y papel adaptando las reglas sin el dado. Cada jugador en su turno puede elegir un número entre 1 y 6 para añadir a la suma, con la condición de que no puede ser el número elegido en la jugada anterior por su contrincante, ni el complementario a 7. Así, si el jugador ha elegido el 2, el contrario no puede utilizar ni el 2 ni el 7 – 2 = 5. Se puede observar fácilmente que es el mismo proceso que se lleva adelante con el dado cúbico, pues en estos dados la suma de las caras opuestas es 7, y si en la cara superior hay un 2, en la inferior está el 5.

Dejamos aquí planteados algunos retos: ¿tiene este juego estrategia ganadora?, ¿se puede encontrar una disposición del dado de forma que desde ese momento se pueda asegurar la victoria, juegue lo que juegue el contrario?

Como es evidente también se pueden cambiar las normas, ampliando o reduciendo el límite al que se llega, imponiendo que el que pase de 30 pierde, o jugando con dados que no sean cúbicos, por ejemplo, los que se utilizan en juegos de rol: octaedro, dodecaedro, icosaedro, etc.

Hay que tener en cuenta que si se utiliza un dado tetraédrico, se ha de elegir un número entre 1 y 4 con la única condición de que no se puede repetir el valor del compañero. Se puede ver rápidamente que es una versión reducida del primer juego que hemos visto, ya que si empezamos por 1 y después completamos a 5 (por lo que nunca vamos a repetir lo que haya dicho el compañero) tenemos asegurada la victoria.

En los dos juegos anteriores, la operación matemática aplicada ha sido la suma. En cursos bajos de Primaria es posible utilizar estos juegos sin la pretensión de buscar una estrategia sino meramente para practicar las sumas de una manera más atractiva. Hay que tener presente que el utilizar un juego en clase siempre tiene el plus del interés por ganar, sea un solitario o una competición entre iguales. Vamos a ver a continuación una adaptación de un juego en el que el proceso cambia al utilizar las restas de números, aunque como veremos es una versión modificada de los anteriores.

4. Coger fichas de un montón.

Hay todo un bloque de juegos que se basa en partir de un conjunto de fichas de las que hay que ir retirando una o varias de ellas hasta que se recogen todas las de la mesa. Un ejemplo sería el siguiente.

Tenemos un montón con 15 fichas y dos jugadores. Cada jugador en su turno puede retirar 1, 2 o 3 fichas del montón. Gana el jugador que se lleva la última.

Rápidamente podemos convertirlo en un juego de lápiz y papel con números. Tenemos que ir restando a 15 hasta conseguir 0. Cada jugador en su turno puede restar un número entre 1 y 3 ambos inclusive. Gana el jugador que deja la resta en cero.

Como en el caso de “Llegar a cien”, una vez jugadas varias partidas hay que plantear una serie de cuestiones para promover el razonamiento y la búsqueda de estrategias.

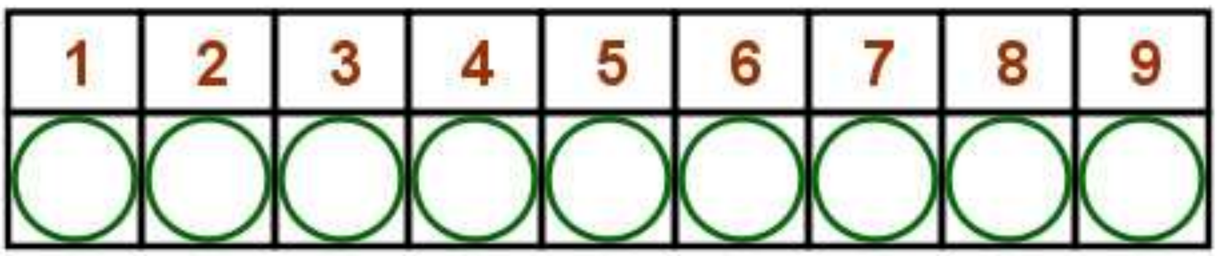
1) Busca una estrategia ganadora que te permita ganar haga lo que haga el contrario. En esa estrategia, ¿quién es el jugador que gana?
2) ¿Cómo cambia la estrategia si el que llega a 0 o a un número negativo es el que pierde?
3) ¿Qué ocurre, en el planteamiento original, si en cada jugada sólo se pueden restar el 1 o el 2?

Como en los juegos anteriores, se pueden modificar tanto el número inicial como las posibilidades de restar, complicándolo tanto como se quiera. Por ejemplo, queremos restar de 50 un número comprendido entre 3 y 8, y después seguir restando del resultado hasta llegar a cero. ¿Qué estrategia hay que seguir para ganar siempre?

5. Quincesuma.

Este último juego se juega con tablero y fichas de color diferente para cada jugador, pero el fundamento vuelve a ser la suma de números.

Tenemos un tablero similar al siguiente:



Se enfrentan dos jugadores, cada uno de ellos con tres fichas. Cada jugador, por turno, coloca una ficha sobre una casilla vacía del tablero. Gana el jugador que consigue sumar 15 con sus tres fichas (no vale con dos de ellas).

Si tras colocarse las seis fichas ningún jugador ha conseguido sumar 15, los jugadores, cada uno en su turno, pueden mover una de sus fichas del tablero a una casilla que esté libre. Se continúa la partida hasta que algún jugador consigue la solución o se determine tablas en el juego.

Para buscar una estrategia que permita ganar, o al menos no perder, es necesario hacer un estudio matemático de los resultados que favorecen la partida. Es decir, los alumnos deberán estudiar todas las posibilidades de conseguir 15. Las ocho ternas que dan 15 son las siguientes:

9 – 5 – 1	9 – 4 – 2	8 – 6 – 1	8 – 5 – 2
8 – 4 – 3	7 – 6 – 2	7 – 5 – 3	6 – 5 – 4

También estudiarán qué valores son los más adecuados para ganar.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Veces que aparece en las ternas	2	3	2	3	4	3	2	3	2

ganadoras									

Así se observa que tiene ventaja el primer jugador si comienza tomando el 5 como primera opción, pues es el que aparece en la mayor cantidad de posibilidades, en 4.

Haciendo un estudio más detallado del juego es posible observar que el juego se reduce a jugar a un Tres en raya sobre un tablero como el siguiente, que es un cuadrado mágico 3x3.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Este cuadrado mágico de razón 15 se construye teniendo en cuenta la información de la tabla de ternas que suman 15. En el centro se coloca el 5, pues está en cuatro de las sumas posibles; en los vértices los números 2, 4, 6 y 8, que aparecen en tres sumas posibles y en los laterales el 1, 3, 7 y 9, que se hallan en dos sumas. Hay ocho grupos de tres casillas (números) que pueden ser alineados sumando 15.

En el Tres en raya y, por tanto, en este juego, si se juega correctamente es imposible perder. Sólo si el contrario no conoce la estrategia se pueden tender trampas de amenazas dobles de sumar quince.

Si en el tablero se juega al Tres en raya con la condición de que, una vez colocadas las seis fichas, sin conseguir 15, se puede mover, una ficha de una casilla a otra adjunta que esté libre, sin levantar la ficha del tablero, entonces existe una estrategia ganadora. Pero esa condición es difícil de trasladar al tablero del quincesuma.

6. Referencia.

CORBALÁN YUSTE, F. (1994): Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato. Editorial Síntesis, Madrid.