DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS CON ORIGAMI[1]

José Muñoz Santonja

Juan Antonio Hans Martín

Antonio Fernández-Aliseda Redondo

Grupo Alquerque – Sevilla

1. Introducción.

La papiroflexia es una actividad que suele resultar muy gratificante y atractiva para personas de todas las edades. Suele hacer mucha ilusión el conseguir construir, sólo con nuestras manos y nuestra imaginación, verdaderas obras de arte. Esto hace que esta actividad aumente la autoestima de todo el que se dedique a ella y sea motivante para investigar posibles variaciones de lo que hayamos conseguido construir. Además, es una actividad que sólo necesita para trabajar con ella uno de los recursos más abundantes en nuestra sociedad, el papel.

Desde el punto de vista educativo es también un recurso muy importante ya que permite desarrollar varias competencias clave en el alumnado. En particular, en nuestra materia, las matemáticas, es un poderoso reclamo para comprobar y demostrar propiedades que debemos ver en nuestras clases. Podemos trabajar aspectos visuales muy atractivos como la construcción de poliedros, y no solamente regulares, sino también los deltaedros o los Sólidos de Catalán. Podemos construir superficies regladas como el paraboloide hiperbólico. En el plano podemos desarrollar aspectos tan diversos como cónicas mediante envolventes, mosaicos artísticos que recubran el plano, demostrar los productos notables algebraicos, o aspectos más básicos como conseguir poliedros regulares doblando un cuadrado o un rectángulo. Para los que trabajamos muchos recursos diferentes, no hemos encontrado ningún método más claro para mostrar en qué consiste el centro de gravedad de un triángulo que trazar las tres medianas mediante doblado, hallar el baricentro como punto de corte de esas medianas, y colocar el triángulo apoyado por ese punto en un punzón y observar como el triángulo se mantiene en equilibrio.

En la década pasada, ya presentamos en nuestra sección de juegos que aparecía en la revista SUMA un artículo dedicado a la papiroflexia matemática[2]. En él mostrábamos como conseguir distintos polígonos regulares mediante dobleces en una tira de papel. Sin embargo, existen muchas otras actividades matemáticas interesantes para trabajar en clase, por ejemplo, como dividir mediante doblado un cuadrado en 5, 7 ó 9 partes iguales, como conseguir rectángulos especiales, como el áureo o el que tiene la proporción $1{:}\sqrt{2}$, que corresponde a los formatos DIN, incluso como conseguir aspectos que no es posible con regla y compás, como la trisección del ángulo o la duplicación del cubo. Todas ellas, y muchas más, hemos trabajado este año en nuestro proyecto de la Feria de la Ciencia que se ha desarrollado en Sevilla.

Parte de ese trabajo lo vamos a presentar en éste artículo. Nuestra pretensión es mostrar cómo se pueden demostrar algunos teoremas más o menos conocidos mediante doblado de papel. Todos los teoremas que vamos a ver hoy utilizan aspectos simples de geometría, pero seguramente algunos de ellos no sean tan conocidos como otros.

---

[1] Juego publicado originalmente en la desaparecida web de Divulgamat en julio de 2018.

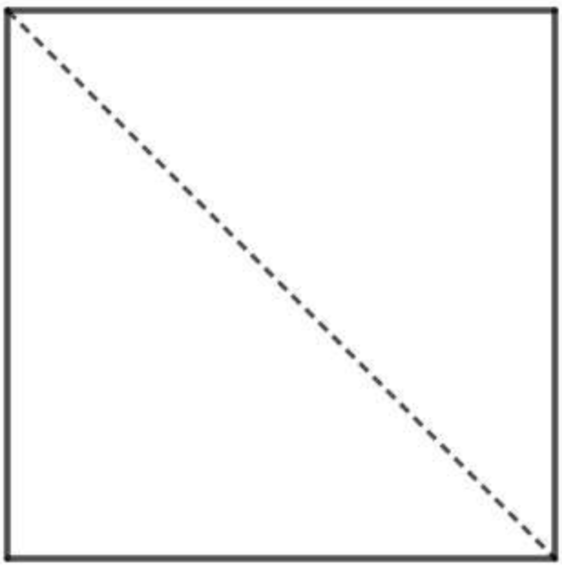
[2] http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10123:agosto-2006-polnos-con-una-tira-de-papel-publicado-en-la-revista-suma-no-46-2004&catid=77:juegos-matemcos&directory=67

2. Teorema de Pitágoras

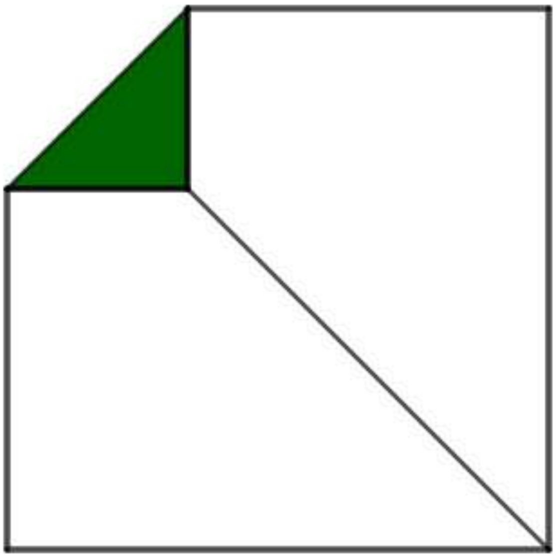
Como no podía ser de otra forma, vamos a comenzar por el que es el teorema estrella de la enseñanza secundaria, aquel que cualquier persona reconoce haber oído hablar, aunque algunos sean incapaces de recordarlo.

Este teorema nos dice que en todo triángulo rectángulo el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos. Vamos a ver su demostración partiendo de los dobleces que vamos a realizar en un cuadrado, que aconsejamos que sea de unas medidas en cm. de 15x15.

1) Primero doblamos por una de las diagonales y tras marcarla, desdoblamos el papel.
2) Llevamos uno de los vértices que forman esa diagonal a coincidir con ella, de forma que no llegue al centro de la diagonal.

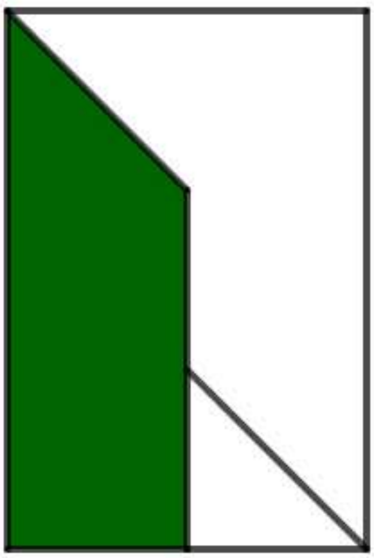


Paso 1

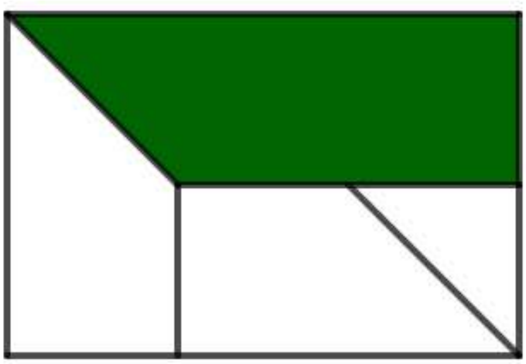


Paso 2

3) Ahora vamos a doblar la hoja siguiendo la línea marcada por los catetos del triángulo doblado.
4) Se hace lo mismo en las dos direcciones y se marcan los dobleces.

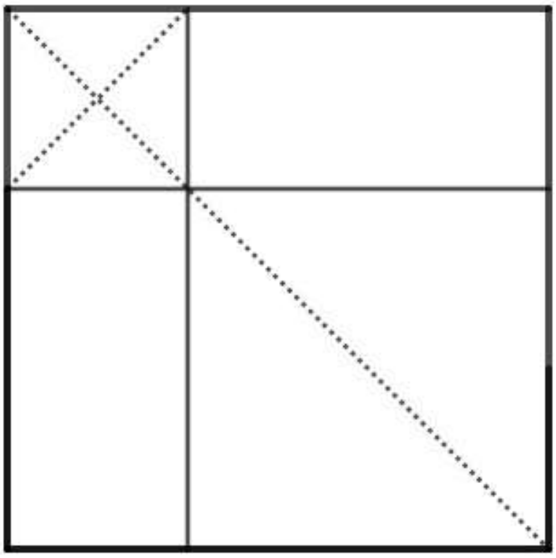


Paso 3

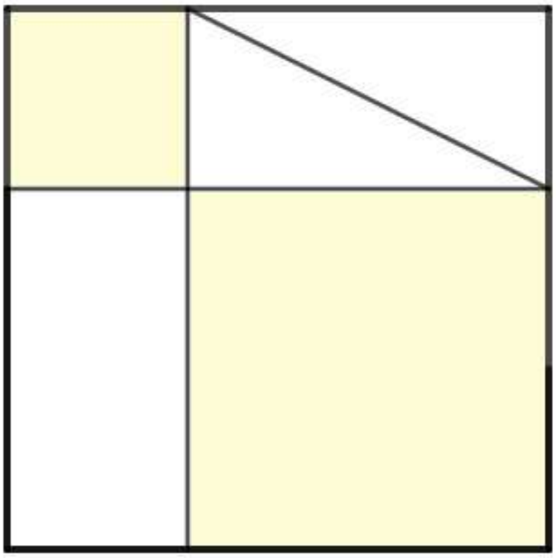


Paso 4

5) Al desdoblar nos vamos a encontrar con las líneas del dibujo. A partir de ahora, las oblicuas de las diagonales no las vamos a tener en cuenta. Nos queda por tanto el cuadrado dividido en dos cuadrados y dos rectángulos.
6) Trazamos una de las diagonales de uno de los rectángulos, quedándonos un triángulo rectángulo. Lo que podemos observar es que el cuadrado ha quedado dividido en cuatro triángulos rectángulos iguales (correspondientes a los dos rectángulos) más dos cuadrados cuyos lados coinciden con la medida de los catetos del triángulo rectángulo.



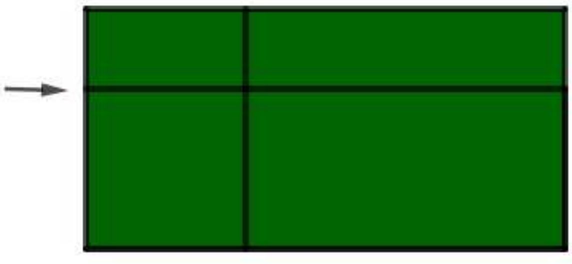
Paso 5



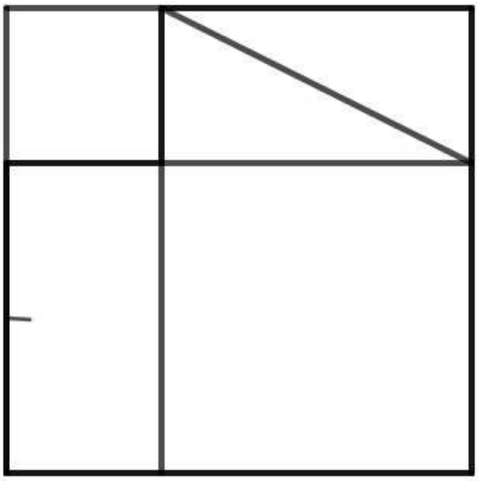
Paso 6

Ahora, para completar el teorema necesitamos llevar la medida del lado pequeño sobre el lado izquierdo del cuadrado y el inferior, para ello seguimos los dos siguientes pasos.

7) Dividimos el cuadrado por la mitad y la línea correspondiente a la división menor se marca sobre el lado posterior. Según se señala en la imagen.
8) No es necesario marcar toda la división, basta con el extremo.

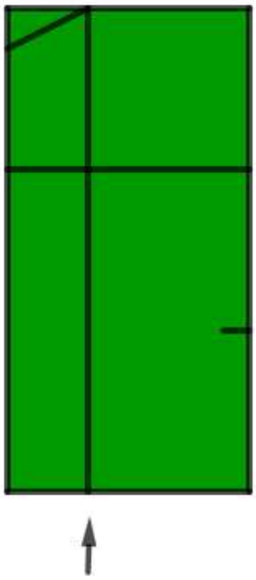


Paso 7

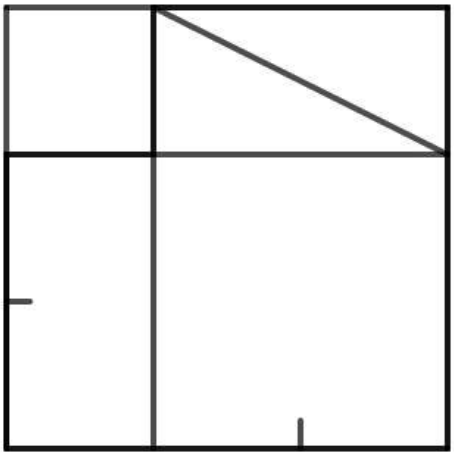


Paso 8

9) Hacemos ahora lo mismo, en sentido perpendicular, para llevar la medida del cateto menor sobre la parte derecha del lado inferior.
10) Igual que en el caso anterior, no es necesario marcar todo el doblez, basta con señalar la parte inferior del cateto menor sobre la parte interior.

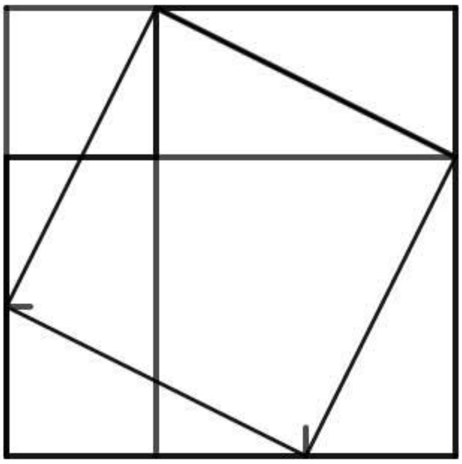


Paso 9

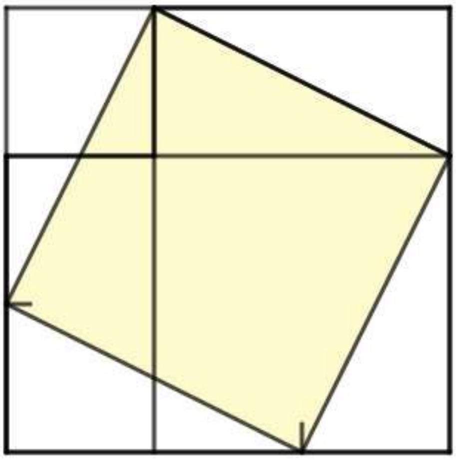


Paso 10

11) El último paso es repetir la diagonal del rectángulo que se había hecho en el paso 6, repitiéndola en los restantes lados y siguiendo siempre una diagonal a la siguiente.



Paso 11



Paso 12

12) Ahora podemos apreciar que el cuadrado original se ha dividido en cuatro triángulos rectángulos más un cuadrado cuyo lado coincide con la hipotenusa del triángulo. Comparando esta expresión con lo obtenido en el paso 6, al eliminar los cuatro triángulos rectángulos obtenemos que el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos. Como queríamos demostrar.

3. Teorema de la mediana sobre la hipotenusa

En un triángulo rectángulo, la mediana sobre la hipotenusa mide lo mismo que la mitad de esa hipotenusa.

Este teorema es muy fácil de demostrar. Dado que la mediana une el punto medio de un lado con el ángulo opuesto, basta señalar con un doblez el punto medio de la hipotenusa y unir ese punto, mediante un doblez, con el vértice opuesto que será el correspondiente al ángulo recto (Figura 1).

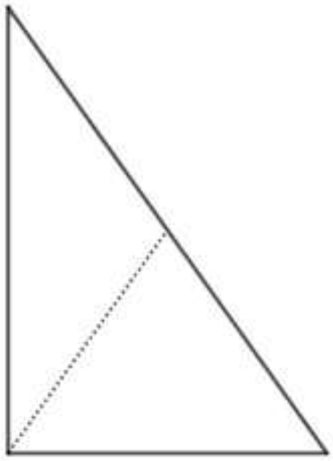


Figura 1

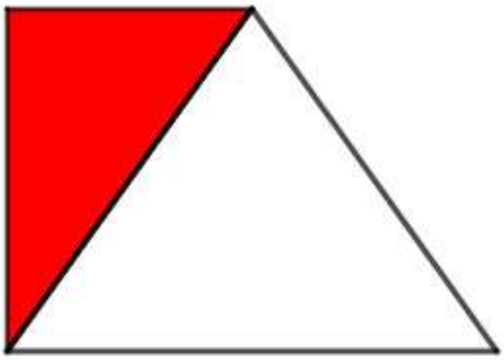


Figura 2

Para comprobar que la mediana mide la mitad de la hipotenusa basta hacerla coincidir con la mitad de la hipotenusa, marcada al señalar el punto medio. Para ello basta doblar la bisectriz de cualquiera de los ángulos formados por una de las dos mitades de la hipotenusa con la mediana (Figura 2).

4. Teorema de los puntos medios de un triángulo

Si unimos los puntos medios de dos lados cualesquiera de un triángulo, la línea correspondiente es paralela al otro lado y mide la mitad de éste.

La demostración es similar a la que usamos para demostrar cuál es el área de un triángulo.

En primer lugar, marcamos los puntos medios de dos lados y trazamos la línea que los une. (Figura1).

Doblamos por esa línea marcada y observamos que quedan tres triángulos, dos parte del triángulo original y uno que es doble resultado del doblez anterior. (Figura 2) El siguiente paso es doblar por las alturas de los dos triángulos de los extremos.

Una vez hecho encontramos un rectángulo, uno de cuyos lados es el doblez del primer paso y cuyo lado opuesto está formado por la mitad del lado opuesto inicial que se han unido dos veces al hacer las dobleces. (Figura 3)

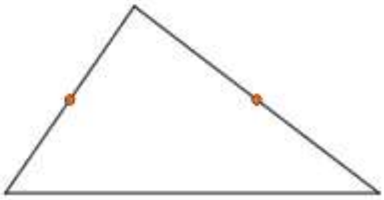


Figura 1


Figura 2

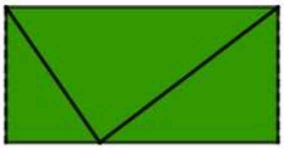


Figura 3

Este procedimiento es el mismo que se sigue para demostrar, usando papiroflexia, que los tres ángulos de un triángulo suman 180º y que el área de un triángulo es base por altura partido por dos.

El teorema anterior se puede generalizar para los trapecios. En un trapecio se llama mediana a la línea que une los puntos medios de los lados no paralelos.

5. Teorema de la mediana de un trapecio

Si en un trapecio se unen los puntos medios de los lados no paralelos, se obtiene la mediana que tiene las características de ser paralela a las bases y su medida ser la semisuma de las dos bases.

La demostración es casi igual que la anterior.

Primero se unen los puntos medios los lados no paralelos (Figura 1).

Al doblar por esa línea, llamada mediana del trapecio, se unen las dos bases, con lo que se demuestra que la mediana es paralela a las bases (Figura 2).

Por último basta doblar por las alturas de los dos triángulos que quedan a los lados del trapecio doblado y obtenemos un rectángulo (Figura 3).

El lado superior del rectángulo es la mediana y el inferior es la mitad de unir las dos bases del trapecio.

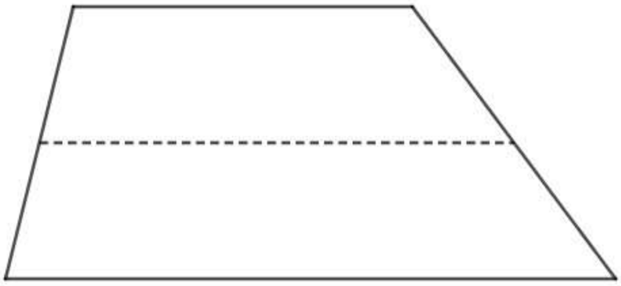


Figura 1

Figura 2

Figura 3

El siguiente teorema se debe al matemático italiano Giovanni Francesco Fagnano (1715 – 1797).

El triángulo órtico es el formado por las tres bases de las alturas de un triángulo acutángulo cualquiera.

Fagnano también demostró que ese triángulo es el de menor perímetro de cualquier triángulo cuyos vértices estén en los tres lados de un triángulo acutángulo cualquiera.

6. Teorema del triángulo órtico

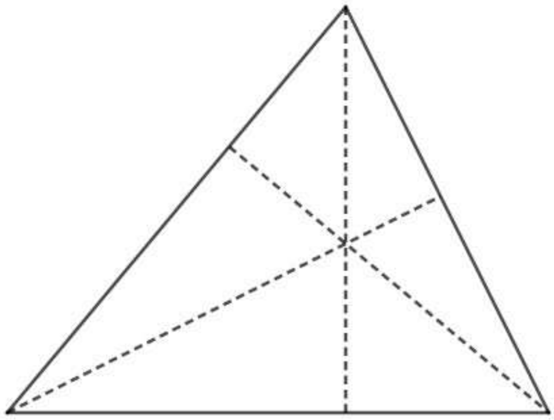
Si se unen los pies de las tres alturas de un triángulo acutángulo, se obtiene otro triángulo, llamado triángulo órtico, que verifica que las bisectrices de los ángulos del segundo triángulo coinciden con las alturas del primer triángulo.

Como consecuencia del anterior, el ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico.

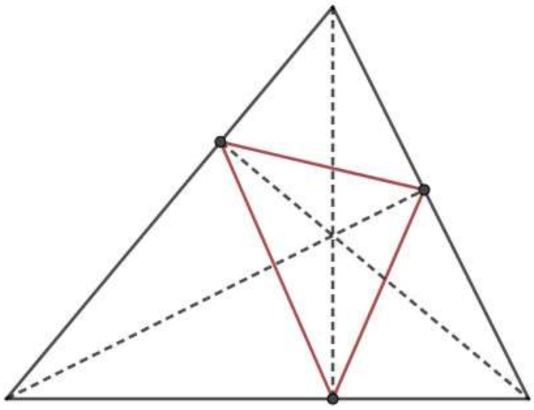
Los pasos a seguir son los siguientes:

1) Se dobla en valle las tres alturas del triángulo.

2) Se trazan en montaña las líneas que unen entre sí los tres pies de esas alturas. Con eso tenemos el triángulo órtico.

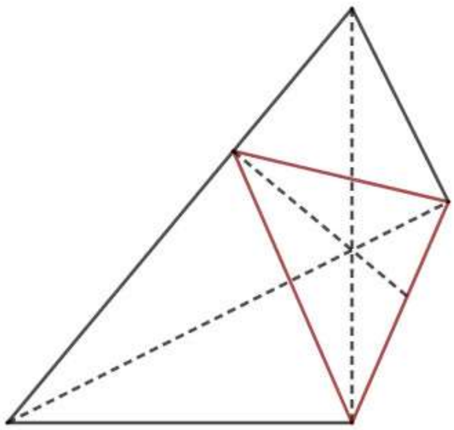


Paso 1

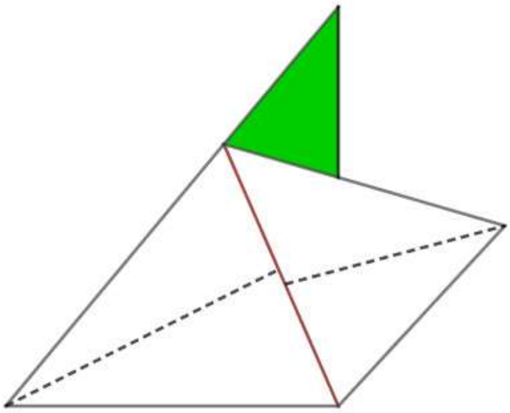


Paso 2

3) Para comprobar el teorema, basta que uno de los últimos dobleces se mantenga hacia atrás.
4) A continuación doblamos por una de las alturas, que no partan del vértice doblado, y se comprueba que los dos lados del triángulo órtico coinciden, con lo que se demuestra que la altura original es la bisectriz del nuevo triángulo.



Paso 3



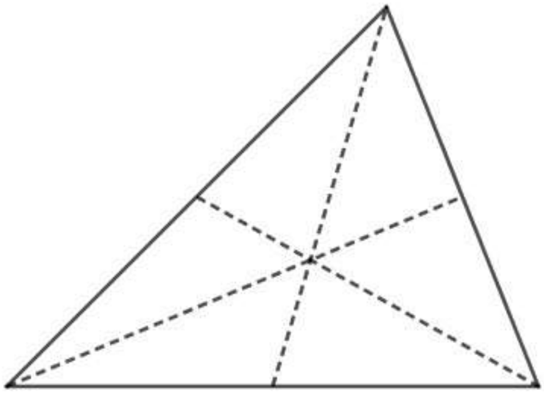
Paso 4

7. Teorema de las medianas de un triángulo

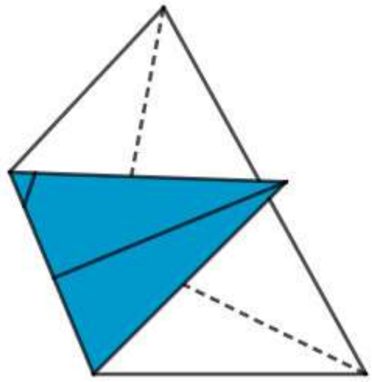
Si por los extremos de las medianas de un triángulo cualquiera se trazan paralelas a las otras dos medianas, se consigue un hexágono formado por seis triángulos cuyos lados son la tercera parte que la mediana paralela al lado.

Los pasos a seguir son los siguientes. Partimos de un triángulo cualquiera, es más manejable si no es obtusángulo.

1) Se trazan las tres medianas del triángulo.
2) Para trazar las paralelas desde los pies de las medianas, lo mejor es doblar una mediana sobre si misma hasta que observemos el pie de otra de las medianas. De esta manera estamos señalando la perpendicular a la mediana desde el pie de la otra mediana.

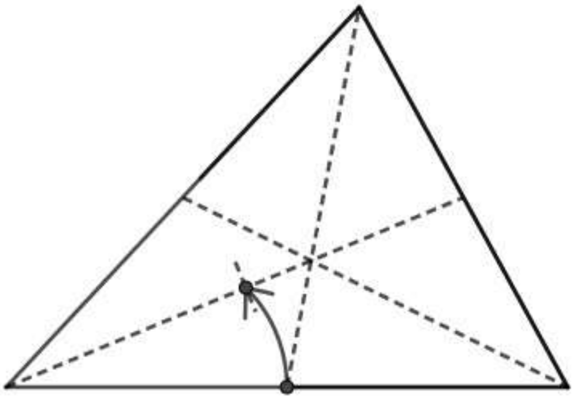


Paso 1

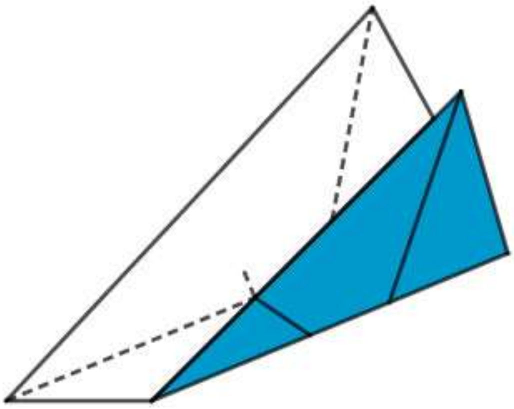


Paso 2

3) Marcamos sólo el doblez alrededor de la mediana doblada.
4) Llevamos el pie de la mediana al doblez que hemos marcado en el punto anterior.

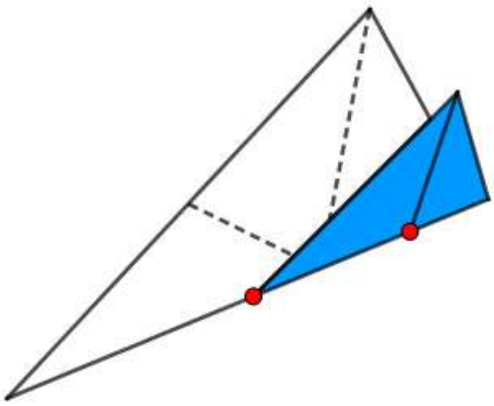


Paso 3

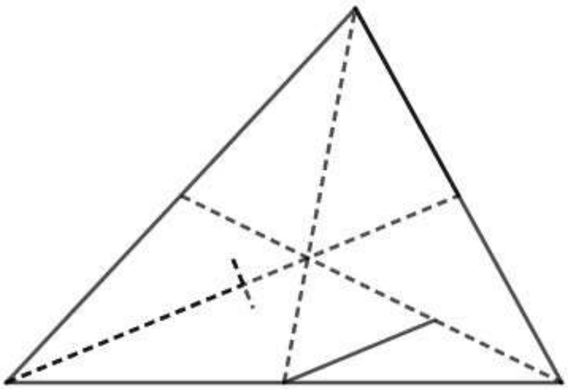


Paso 4

5) Ahora debemos marcar una paralela a la mediana. Para ello doblamos, en montaña (hacia atrás) para verlo mejor, por la mediana a la que queremos hallar la paralela. Se marca sólo el segmento entre el pie de la mediana y la mediana más cercana. Los dos puntos rojos de la imagen.
6) Al desdoblar, ya podemos observar el primer lado del hexágono.



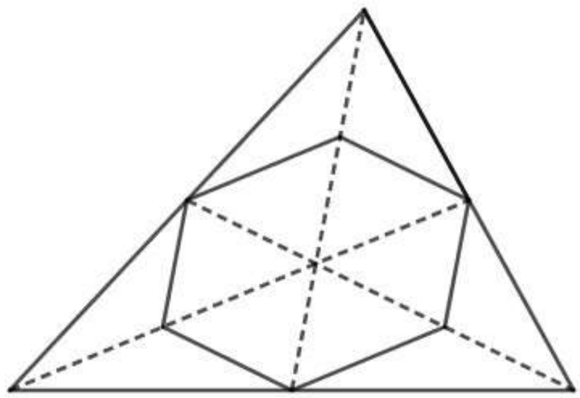
Paso 5



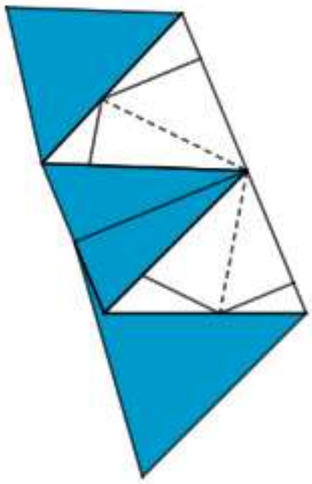
Paso 6

7) Basta repetir el proceso con las restantes medianas y pies para obtener el hexágono indicado.
8) Para ver que los lados de los triángulos que forman el hexágono, son la tercera parte de la mediana, basta ver que los puntos señalados dividen a la mediana en tres partes iguales, ya

que las demás líneas son paralelas a las medianas. Para ello basta doblar por el vértice interior del hexágono y por su punto central para comprobarlo. Para que sea más fácil, una parte se dobla en valle y la otra en montaña.



Paso 7



Paso 8

8. Referencias.

Teorema de la mediana de un trapecio: https://www.youtube.com/watch?v=S532agChCGg

Teorema de Pitágoras: https://www.youtube.com/watch?v=z6lL83wl31E

Enlaces revisados el día 27/05/2018.