ORTOPOLI

Operaciones con polinomios mediante materiales manipulativos

José Luis Leal, Arturo Mandly

Centro de Profesores Don Benito-Villanueva

El ORTOPOLI es un juego educativo diseñado y creado por Arturo Mandly y José Luis Leal Cidoncha, que tiene como fin fundamental el trabajar con binomios de hasta tercer grado, de una forma lúdica e intuitiva.

OBJETIVOS

- General

Realizar una diversidad de operaciones con polinomios (como máximo tercer grado) a través de un lenguaje manipulativo.

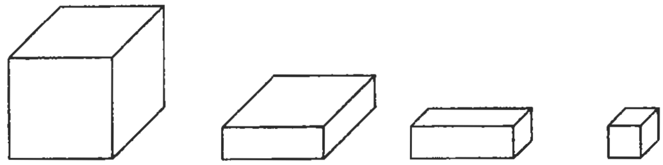
- Específicos

1. Dar una imagen geométrica de los términos de un polinomio.
2. Operar con monomios semejantes.
3. Simplificar y ordenar de forma creciente o decreciente polinomios.
4. Obtener el valor numérico de un polinomio.
5. Comprender el concepto de descomposición de polinomios de hasta 3^{er} grado como la posibilidad de expresarlo como producto de tres factores, haciéndole ver su correspondencia, con las tres dimensiones de un paralelepípedo.
6. Multiplicar polinomios.
7. Asignar una imagen algebraica a un conjunto de piezas dispuestas en forma de distintos paralelepípedos.
8. Dividir polinomios a partir del concepto de reparto, o bien, como disminución de una dimensión (del espacio al plano, del plano a la línea).

MATERIAL

Cada juego consta de 4 tipos de piezas de diferentes colores, correspondientes a los monomios

$$x^3 , x^2 , x , 1$$



x^3 x^2 x 1

En la asignación de medidas a las piezas, debemos tener en cuenta que la arista de la pieza asignada a x no debe ser múltiplo de la arista del cubo unidad.

Las medidas que aconsejamos son: $x = 4{,}7$ cm; arista cubo unidad 2 cm

Las cantidades por piezas deben ser, como mínimo:

x^3 ——————> 2

x^2 ——————> 4

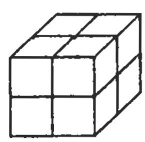
x ——————> 6

1 ——————> 12

DESARROLLO

1. Indicar el número de cubos unidad en distintos paralelepípedos.

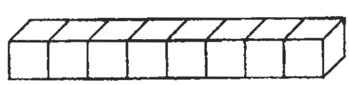
Por ejemplo:



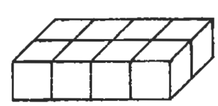
$$\underset{\text{largo}}{2} \cdot \underset{\text{ancho}}{2} \cdot \underset{\text{alto}}{2} = 8$$

2. A partir de un número determinado de cubos unidad, formar los distintos paralelepípedos posibles, indicando sus dimensiones y el producto de ellas.

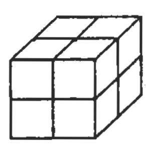
Por ejemplo: Con 8 cubos unidad podemos formar los siguientes paralelepípedos.



$8 \cdot 1 \cdot 1 = 8$



$4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$



$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

(En realidad, se trata de buscar tres divisores de 8 que multiplicados entre sí den 8.)

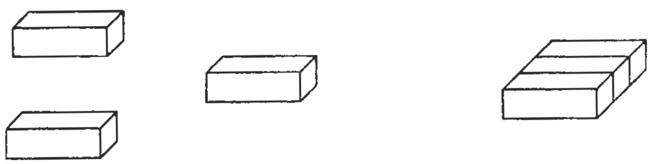
3. Señalar el valor de cada pieza; para ello le indicaremos que existe una medida fija y desconocida llamada *x*. Los alumnos deben relacionar cada pieza con su monomio correspondiente.

4. Operaciones con monomios semejantes:

Ejemplo 1: Calcular con ayuda de las piezas la siguiente suma $2x + x$.

- Solución trivial ————> $3x$

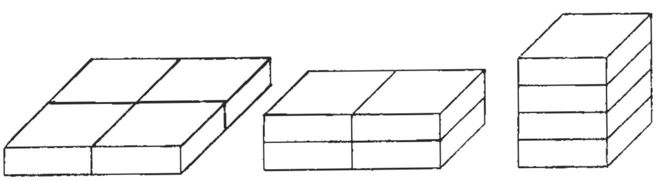
- Interpretaciones



Ejemplo 2: Calcular $3x^2 + x^2$

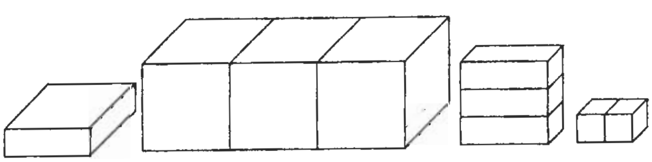
- Solución trivial $4x^2$

- Interpretaciones



5. Averiguar las piezas que corresponden a un polinomio.

Por ejemplo: $x^2 + 3x^3 + 3x + 2$



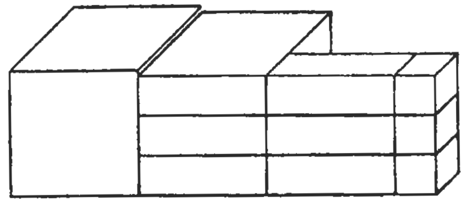
Y viceversa (escribir un polinomio a partir de unas piezas dadas).

6. Simplificar y ordenar de forma creciente y decreciente polinomios.

Por ejemplo: $2x + x^2 + 2 + x^3 + x + 1 + 2x^2$

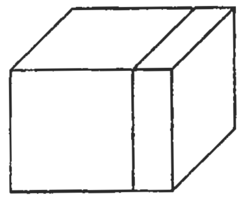
Simplificamos y lo ordenamos en forma decreciente.

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 3$$



7. A partir de un número de piezas, formar un paralelípedo, indicando sus dimensiones y al mismo tiempo introducirles en la descomposición factorial de un polinomio.

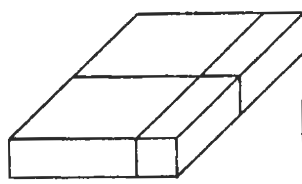
Ejemplo 1: $x^3 + x^2$



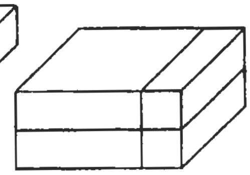
$x\ (x+1)\ x$ ————> $x^2\ (x+1)$

Ejemplo 2: $2x^2 + 2x$

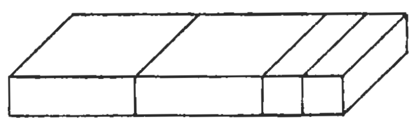
posibles construcciones



$(x + 1) \cdot 2x \cdot 1$



$(x + 1) \cdot x \cdot 2$



$(2x + 2) \cdot x \cdot 1$

Otros ejercicios:

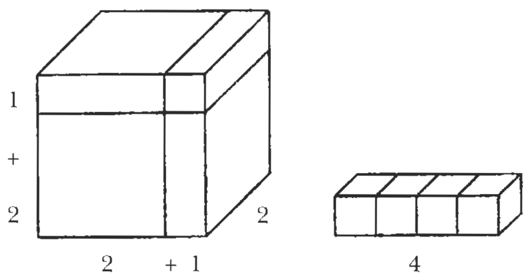
$x^3 + 2x^2 + x$	$2x^2 + 4x + 2$
$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	$2x^2 + 3x + 1$
$4x^2 + 4x + 1$	$x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
$4x^2 + 6x + 2$	

8. Valor numérico de un polinomio; para ello construimos la representación geométrica correspondiente y sustituimos la letra *x* por su valor.

Por ejemplo: Calcular el valor numérico del polinomio

$x^3 + 2x^2 + x + 4$ para $x = 2$

construimos su representación geométrica



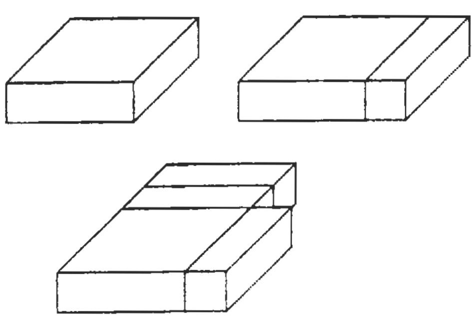
$$(2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot 2 + 4 = 22$$

9. Producto de binomios de primer grado:

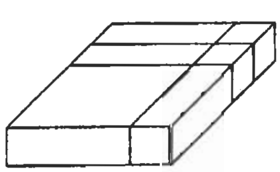
Al multiplicar un número por un binomio de grado 1, el binomio resultante será siempre de grado 1, con lo cual tendremos que utilizar forzosamente una pieza *x*, que nos servirá para comenzar la construcción.

Igual sucede si multiplicamos dos binomios de grado 1, que el polinomio resultante será de grado 2. La pieza x^2 nos servirá para comenzar. Y si multiplicamos tres binomios comenzaremos a construir con la pieza x^3.

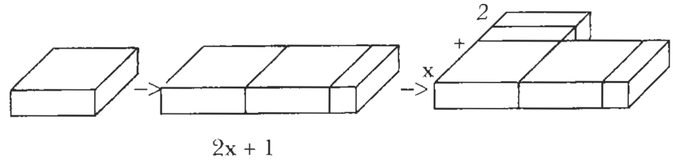
Ejemplo 1: $(x + 1) \cdot (x + 2)$



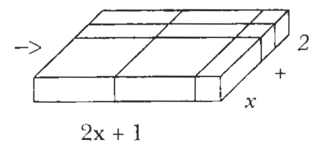
y completamos



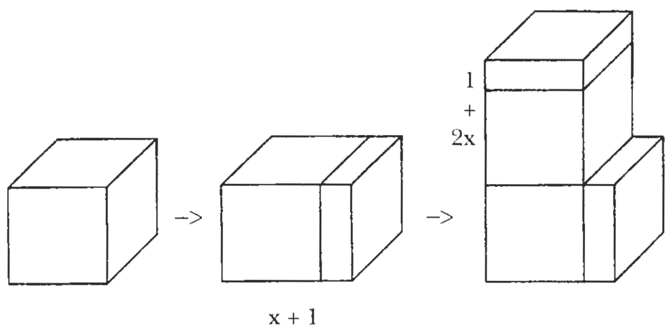
Ejemplo 2: $(2x + 1) \cdot (x + 2)$



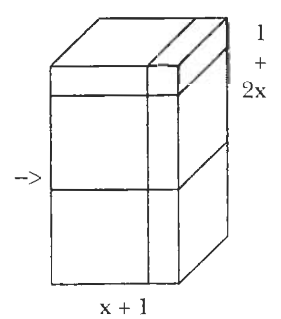
y completamos



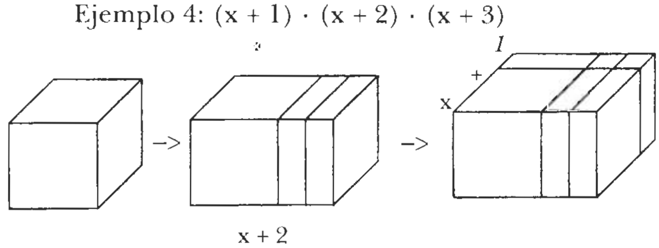
Ejemplo 3: $x \cdot (x + 1) \cdot (2x + 1)$

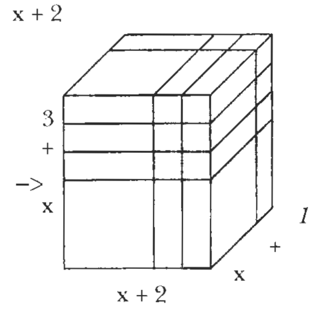


y completamos



Ejemplo 4: $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$





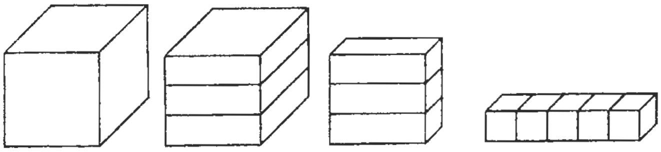
10. División de polinomios:

Conceptualmente podemos enfocar la división de dos formas distintas.

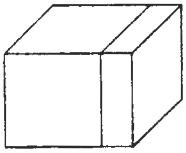
a) Como reparto de piezas múltiplo de divisor.

b) Como disminución del polinomio dividendo en una dimensión de longitud el divisor.

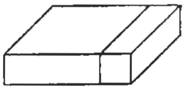
Por ejemplo: $(x^3 + 3x^2 + 3x + 5) : (x + 1)$



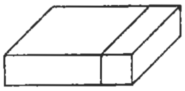
Forma a): Se empieza por repartir los monomios de mayor grado, formando el mayor paralelepípedo posible tal que una de sus dimensiones sea el divisor $x + 1$.



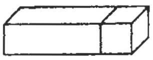
$$\frac{(x + 1) \cdot x^2}{x + 1} = x^2$$



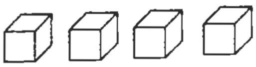
$$\frac{(x + 1) \cdot x \cdot 1}{x + 1} = x$$



$$\frac{(x + 1) \cdot x \cdot 1}{x + 1} = x$$



$$\frac{x + 1}{x + 1} = 1$$

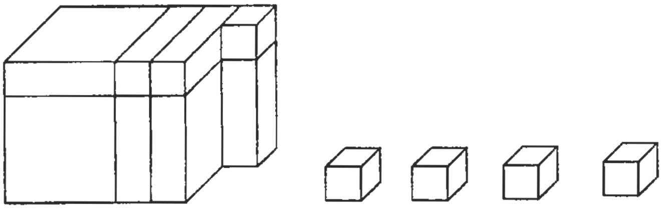


sobran 4 unidades (resto)

Resultado: Cociente $x^2 + 2x + 1$

Resto 4

Forma b): Consiste en formar con el dividendo el prisma más grande posible de altura el divisor. Siendo el cociente la sección horizontal y el resto, las piezas sobrantes que no forman el paralelepípedo.

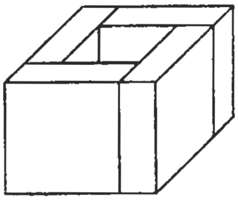


Resultado: Cociente $x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$

Resto 4

ANEXO

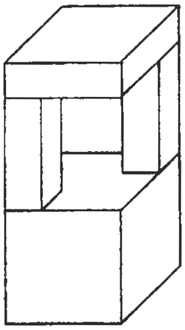
Con este tipo de piezas también se pueden plantear ejercicios más complejos, como por ejemplo el siguiente:



$$x \cdot (x + 1)^2 - x \cdot (x - 1)^2 = 4x^2$$

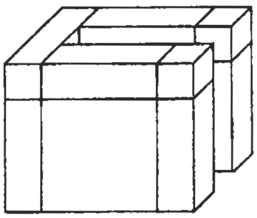
Esta expresión la desarrollaría algebraicamente el alumno hasta conseguir la solución, que geométricamente es trivial ($4x^2$).

De forma análoga, las siguientes composiciones:



$$x^2 \cdot (2x + 1) - x^3 + 2x = x^3 + x^2 + 2x$$

$$(x + 2) \cdot (x + 1) \cdot x - (x + 1)^2 \cdot (x - 2)$$



$(2x + 1)^2$