DEMOSTRACIONES DE TEOREMAS MATEMÁTICAS POR ORIGAMI

TEOREMA DE LA MEDIANA SOBRE LA HIPOTENUSA

En un triángulo rectángulo, la mediana sobre la hipotenusa mide lo mismo que la mitad de esa hipotenusa.

Este teorema es muy fácil de demostrar. Dado que la mediana une el punto medio de un lado con el ángulo opuesto, basta señalar con un doblez el punto medio de la hipotenusa y unir ese punto, mediante un doblez, con el vértice opuesto que será el correspondiente al ángulo recto (Figura 1).

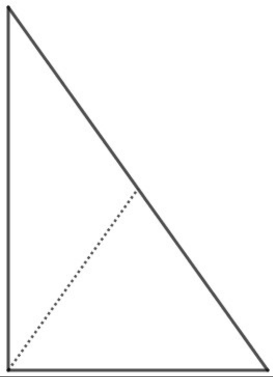


Figura 1

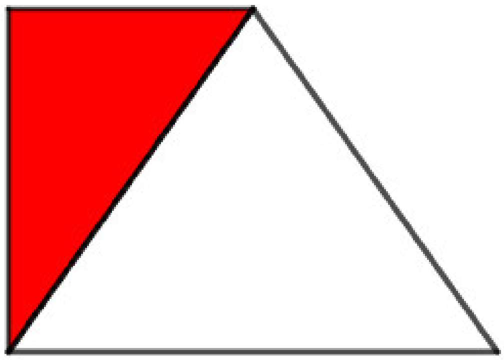


Figura 2

Para comprobar que la mediana mide la mitad de la hipotenusa basta hacerla coincidir con la mitad de la hipotenusa, marcada al señalar el punto medio. Para ello basta doblar la bisectriz de cualquiera de los ángulos formados por una de las dos mitades de la hipotenusa con la mediana (Figura 2).

TEOREMA DE LOS PUNTOS MEDIOS DE UN TRIÁNGULO

Si unimos los puntos medios de dos lados cualesquiera de un triángulo, la línea correspondiente es paralela al otro lado y mide la mitad de éste.

La demostración es similar a la que usamos para demostrar cuál es el área de un triángulo.

En primer lugar, marcamos los puntos medios de dos lados y trazamos la línea que los une. (Figura1).

Doblamos por esa línea marcada y observamos que quedan tres triángulos, dos parte del triángulo original y uno que es doble resultado del doblez anterior. (Figura 2) El siguiente paso es doblar por las alturas de los dos triángulos de los extremos.

Una vez hecho encontramos un rectángulo, uno de cuyos lados es el doblez del primer paso y cuyo lado opuesto está formado por la mitad del lado opuesto inicial que se han unido dos veces al hacer las dobleces. (Figura 3)

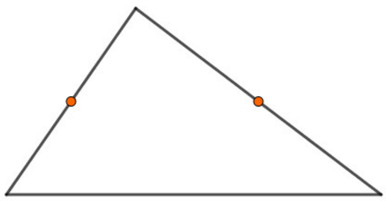


Figura 1

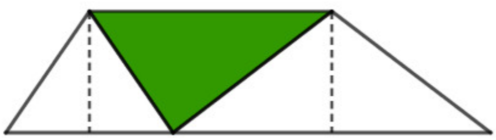


Figura 2

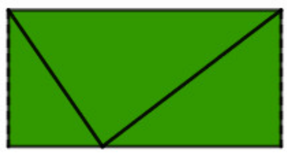


Figura 3

El teorema anterior se puede generalizar para los trapecios. En un trapecio se llama mediana a la línea que une los puntos medios de los lados no paralelos.

TEOREMA DE LA MEDIANA DE UN TRAPECIO

Si en un trapecio se unen los puntos medios de los lados no paralelos, se obtiene la mediana que tiene las características de ser paralela a las bases y su medida ser la semisuma de las dos bases.

La demostración es casi igual que la anterior.

Primero se unen los puntos medios los lados no paralelos (Figura 1).

Al doblar por esa línea, llamada mediana del trapecio, se unen las dos bases, con lo que se demuestra que la mediana es paralela a las bases (Figura 2).

Por último basta doblar por las alturas de los dos triángulos que quedan a los lados del trapecio doblado y obtenemos un rectángulo (Figura 3).

El lado superior del rectángulo es la mediana y el inferior es la mitad de unir las dos bases del trapecio.

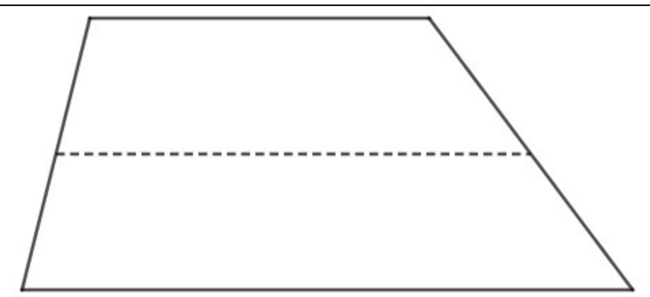


Figura 1

Figura 2

Figura 3

El siguiente teorema se debe al matemático italiano Giovanni Francesco Fagnano (1715 – 1797). El triángulo órtico es el formado por las tres bases de las alturas de un triángulo acutángulo cualquiera. Fagnano también demostró que ese triángulo es el de menor perímetro de cualquier triángulo cuyos vértices estén en los tres lados de un triángulo acutángulo cualquiera.

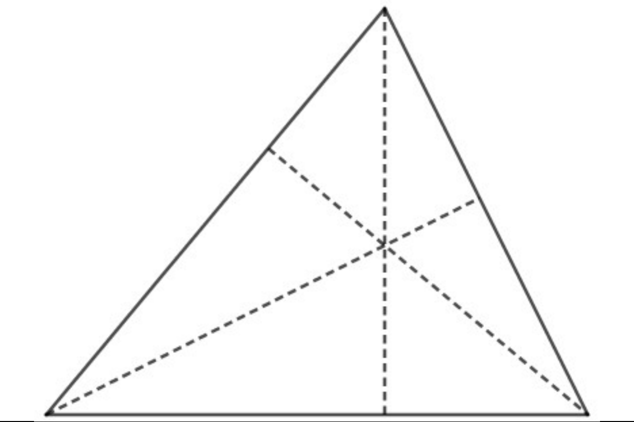
TEOREMA DEL TRIÁNGULO ÓRTICO

Si se unen los pies de las tres alturas de un triángulo acutángulo, se obtiene otro triángulo, llamado triángulo órtico, que verifica que las bisectrices de los ángulos del segundo triángulo coinciden con las alturas del primer triángulo.

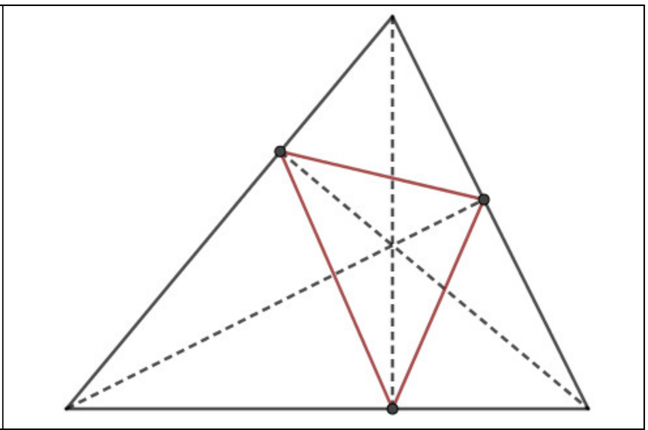
Como consecuencia del anterior, el ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1) Se dobla en valle las tres alturas del triángulo.
2) Se trazan en montaña las líneas que unen entre sí los tres pies de esas alturas. Con eso tenemos el triángulo órtico.

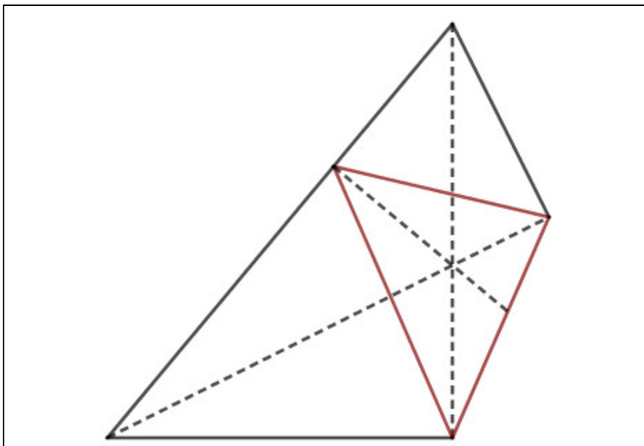


Paso 1

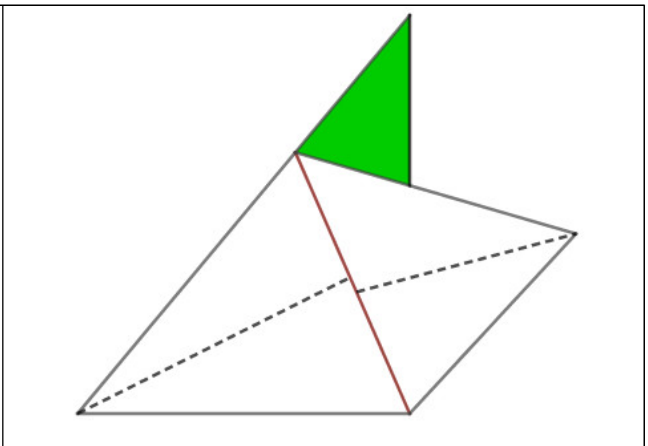


Paso 2

3) Para comprobar el teorema, basta que uno de los últimos dobleces se mantenga hacia atrás.
4) A continuación doblamos por una de las alturas, que no partan del vértice doblado, y se comprueba que los dos lados del triángulo órtico coinciden, con lo que se demuestra que la altura original es la bisectriz del nuevo triángulo.



Paso 3



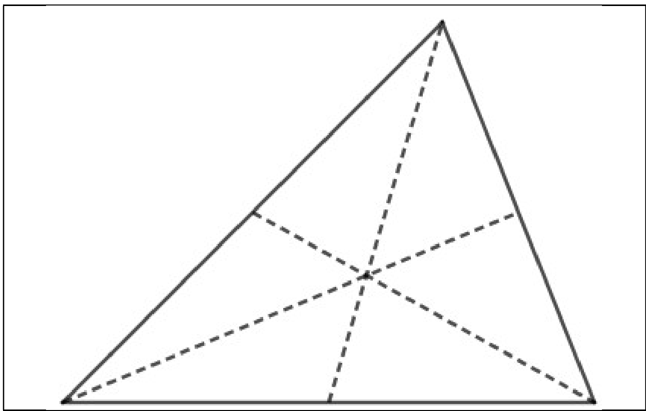
Paso 4

TEOREMA DE LAS MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO

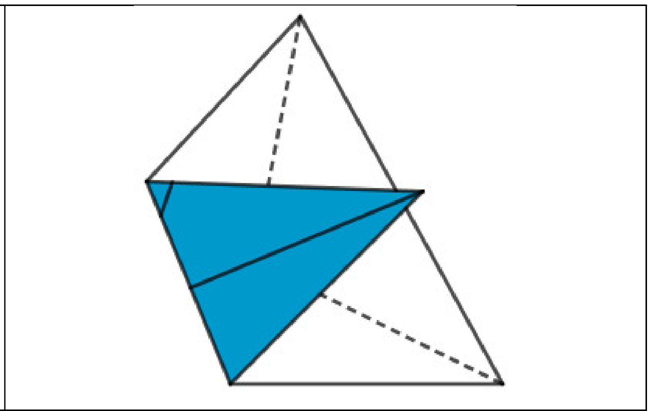
Si por los extremos de las medianas de un triángulo cualquiera se trazan paralelas a las otras dos medianas, se consigue un hexágono formado por seis triángulos cuyos lados son la tercera parte que la mediana paralela al lado.

Los pasos a seguir son los siguientes. Partimos de un triángulo cualquiera, es más manejable si no es obtusángulo.

1) Se trazan las tres medianas del triángulo.
2) Para trazar las paralelas desde los pies de las medianas, lo mejor es doblar una mediana sobre si misma hasta que observemos el pie de otra de las medianas. De esta manera estamos señalando la perpendicular a la mediana desde el pie de la otra mediana.

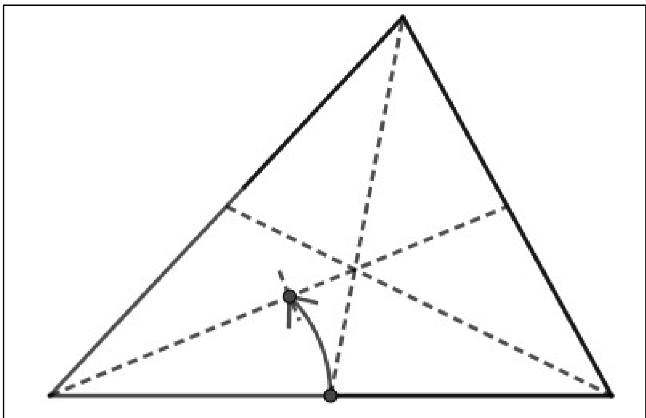


Paso 1

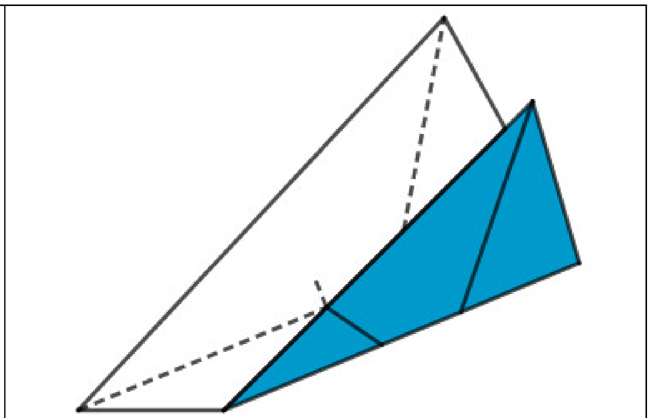


Paso 2

3) Marcamos sólo el doblez alrededor de la mediana doblada.
4) Llevamos el pie de la mediana al doblez que hemos marcado en el punto anterior.

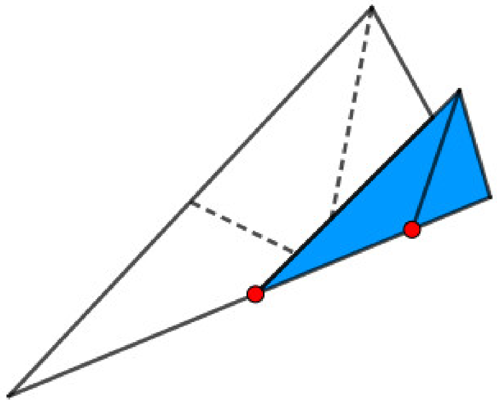
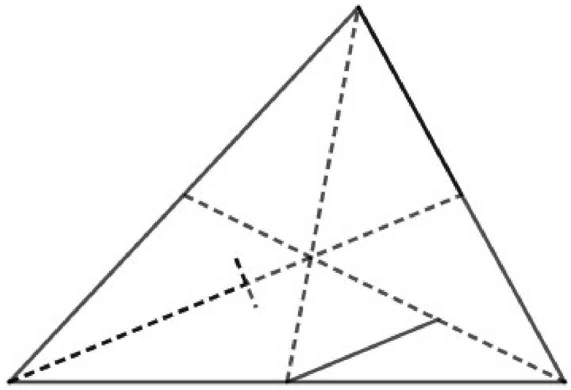


Paso 3

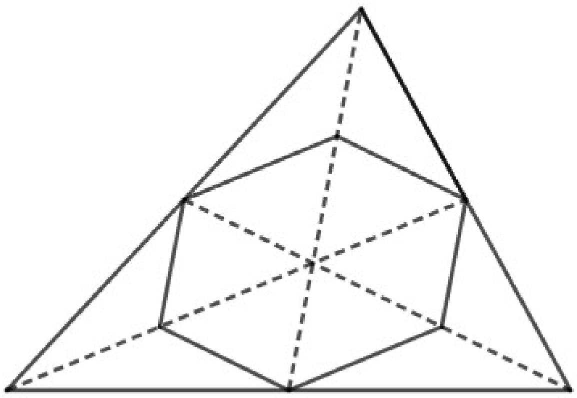
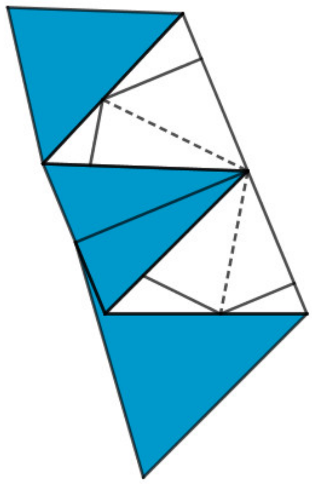


Paso 4

5) Ahora debemos marcar una paralela a la mediana. Para ello doblamos, en montaña para verlo mejor, por la mediana a la que queremos hallar la paralela. Se marca sólo el segmento entre el pie de la mediana y la mediana más cercana. Los dos puntos rojos de la imagen.
6) Al desdoblar, ya podemos observar el primer lado del hexágono.

	
Paso 5	Paso 6

7) Basta repetir el proceso con las restantes medianas y pies para obtener el hexágono indicado.
8) Para ver que los lados de los triángulos que forman el hexágono, son la tercera parte de la mediana, basta ver que los puntos señalados dividen a la mediana en tres partes iguales, ya que las demás líneas son paralelas a las medianas. Para ello basta doblar por el vértice interior del hexágono y por su punto central para comprobarlo. Para que sea más fácil, una parte se dobla en valle y la otra en montaña.

	
Paso 7	Paso 8