CACUMEN

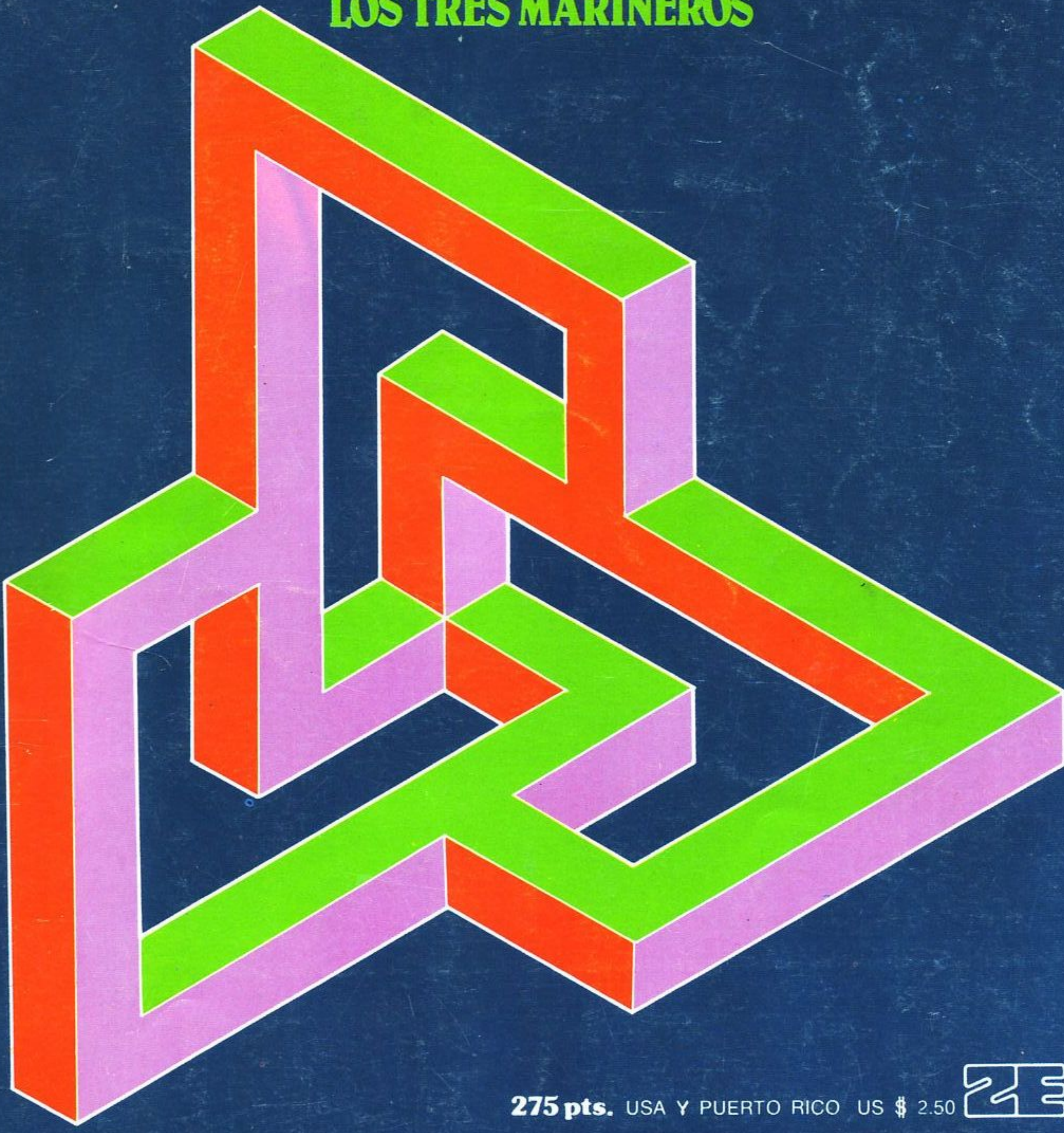
revista lúdica de cavilaciones

año II-número 19 agosto 1984

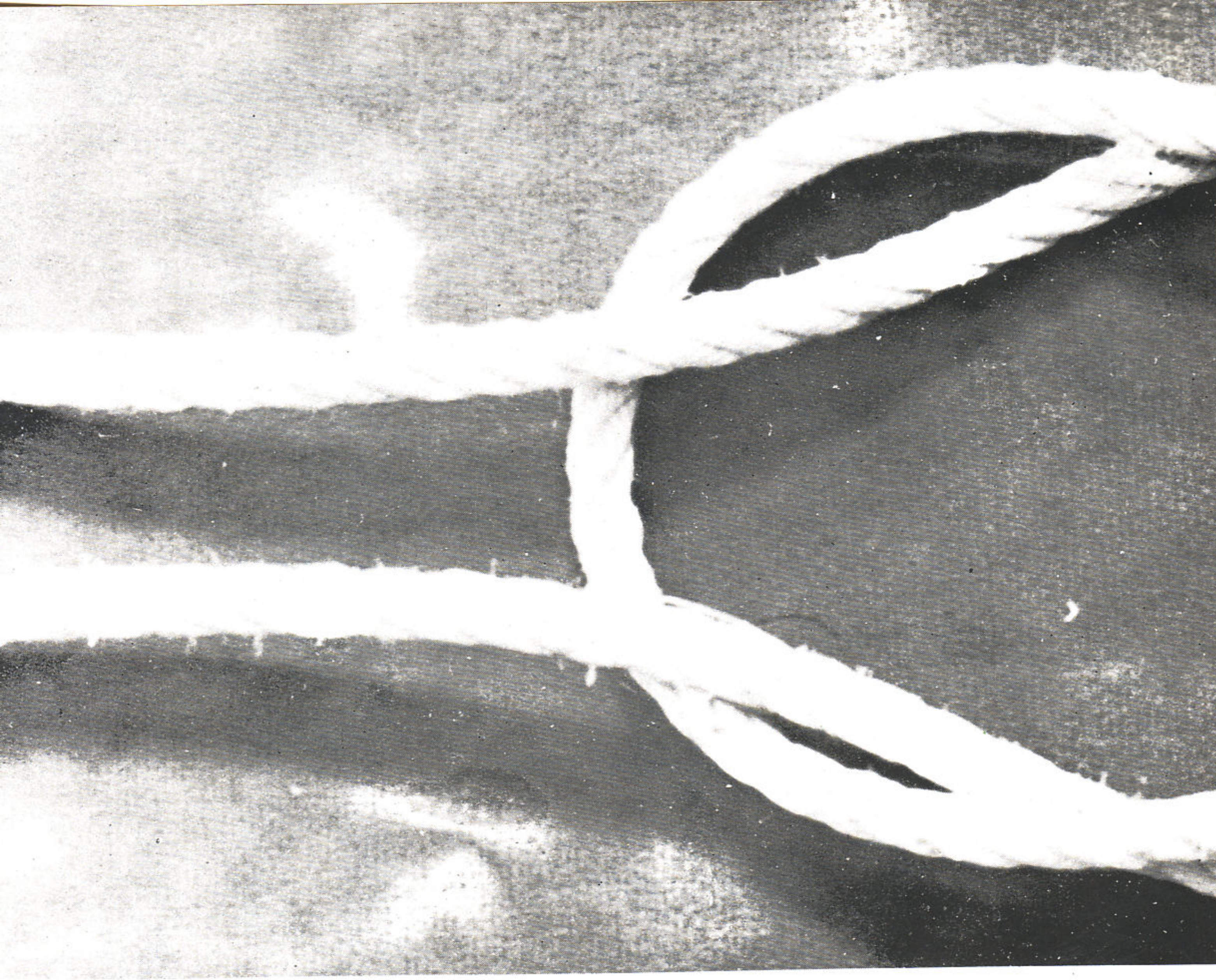
AGRESION: UN JUEGO DE GUERRA ENTRE NAPOLEON Y WELLINGTON

DEL YETI AL ESLABON PERDIDO

CUENTO DE LORD DUNSANY: EL GAMBITO DE LOS TRES MARINEROS



275 pts. USA Y PUERTO RICO US $ 2.50



NUDOS, TRENZAS, Y OTROS

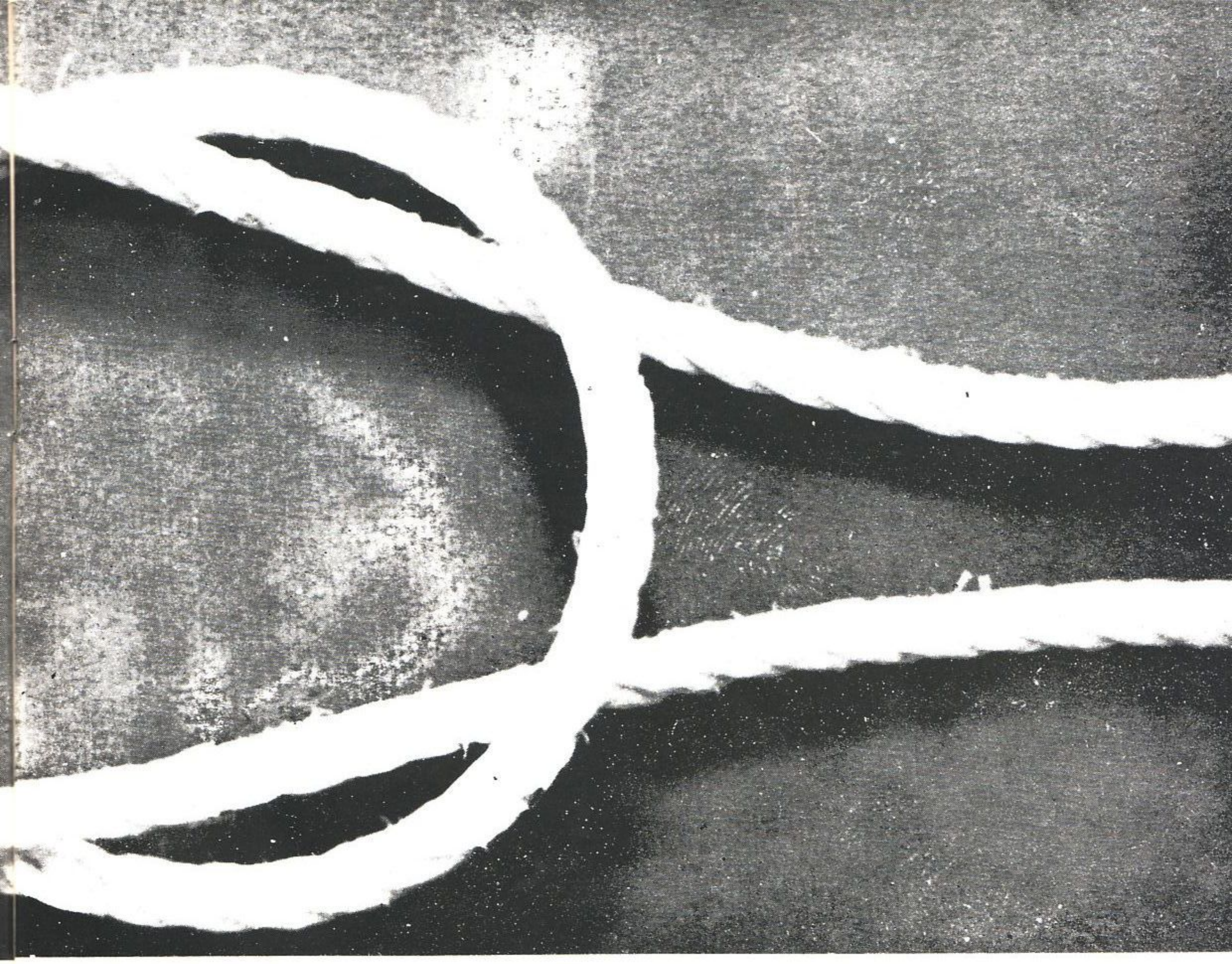
Cuando se anuda los cordones de los zapatos, ¿está seguro de que es eso precisamente lo que ocurre?, ¿no será que es Vd. quién se torsiona alrededor del cordón?

Por J. A. de ECHAGÜE

NUDOS

Cuenta la leyenda, a caballo en este caso entre la historia y la Mitología, que un tal Gordias, rústico labrador frigio elevado nada menos que a rey de sus paisanos por un malentendido sobre un confuso oráculo, mandó erigir en agradecimiento un templo a Zeus en el que, como ofrenda personal, depositó su carro de labranza. Según se decía en toda Grecia, el oráculo se interpretó en el sentido de que los Frigios deberían elegir como rey al primero que pasase montado en un carro, resultando ser Gordias quien acertó a pasar. La leyenda es un tanto inverosímil, pero lo cierto es que, según todos los indicios, en tiempos históricos existió en efecto un templo de Zeus en el que se admiraba un carro de labranza por el extraordinario nudo que unía el yugo y el timón, que parecía imposible de deshacer, tal era su sólida factura. Por algún oscuro motivo existía el convencimiento de que quien fuese capaz de desenredar y deshacer el famoso «nudo gordiano» llegaría a dominar Asia. En el año 334 (A. C.) Alejandro de Macedonia, más tarde llamado el Grande, visitó el templo y contempló el nudo; enterado de la leyenda no lo dudó un instante, de un decidido golpe de espada partió y deshizo sin contemplaciones el dichoso «nudo gordiano». Como es bien sabido conquistó Asia poco después. Bien se ve que no funcionaban mal por entonces las campañas de imagen político-mitológica.

Dos mil doscientos sesenta y ocho años más tarde, durante un famoso Congreso de Física, el célebre Niels Bohr dejó atónitos a los mayores científicos de su época —o sea del siglo XX— explicando gráficamente cómo había llegado a muy importantes descubrimientos sobre la estructura atómica y sus fuerzas cuánticas, mediante el ingenioso procedimiento de colgar de dos cintas las tijeras de su señora, retorciendo, anudando y trenzando las cintas, para comprender los complejos grupos de simetría y rotaciones posibles en el espacio. Aunque lo parezca no es ninguna broma: los movimientos de las tijeras de Bohr están efectivamente relacionados nada menos que



S PROBLEMAS GORDIANOS

con las nada sencillas simetrías con las que se explican y predicen las partículas subatómicas y sus sorprendentes características.

Resulta ciertamente notable que los modestos y domésticos «nudos» hayan tenido tan enormes consecuencias en la Historia de la humanidad y en la Ciencia más avanzada. Pero a mi modo de ver es mucho más sorprendente aún que durante los casi veintitrés siglos transcurridos entre los dos episodios mencionados, desde el sablazo alejandrino al nudo gordiano hasta el gran físico Bohr, únicamente se hayan ocupado de nudos y demás derivados los marineros y pescadores; los tejedores y aficionadas al punto y ganchillo; los alguaciles, presos, ahorcados y verdugos; y más recientemente los prestidigitadores y «magos de feria», sin contar claro está al gran Robert Houdin, el gran mago de las fugas y escapes, inigualable deshaciendo nudos, que por cierto aprendió mucho de un genial y casi desconocido catalán del siglo XVIII, llamado Minguet.

EL PROBLEMA DE LAS TIJERAS

En las indagaciones y pesquisas que sobre nudos y cuestiones afines he realizado vengo observando una intrigante circunstancia: La sistemática tendencia de quienes han trabajado en estos problemas a utilizar tijeras. Tengo para mí que se trata de una reminiscencia, quizá inconsciente, del ejemplo de Alejandro y su expeditivo procedimiento para resolver el problema «gordiano».

Ya se mencionó el notable caso de Niels Bohr, pero es que hay un ejemplo digno de no olvidarlo. Me refiero al de Pablo Minguet, casi desconocido desgraciadamente, posiblemente uno de los primeros estudiosos del mundo de los juegos, incluso de los juegos de raíz matemática. Se sabe que escribió libros sobre ajedrez y damas, además de tratados sobre baile, música y otros muchos temas que acreditan su universal saber y curiosidad. Lo más notable es, empero, el libro que, en tan temprana fecha como 1733, compuso con el título de «Engaños a ojos vistas y diversión de trabajos mundanos fundada en lícitos juegos de manos que contiene todas las diferencias de los cubiletes y otras habilidades muy curiosas demostradas con diferentes láminas, para que los pueda hacer fácilmente cualquier entretenido.»

Es un libro sencillamente asombroso para su época. Contiene el embrión —y en muchos casos más que el embrión— de lo que hoy en día, por obra de M. Gardner y otros, son los juegos matemá-

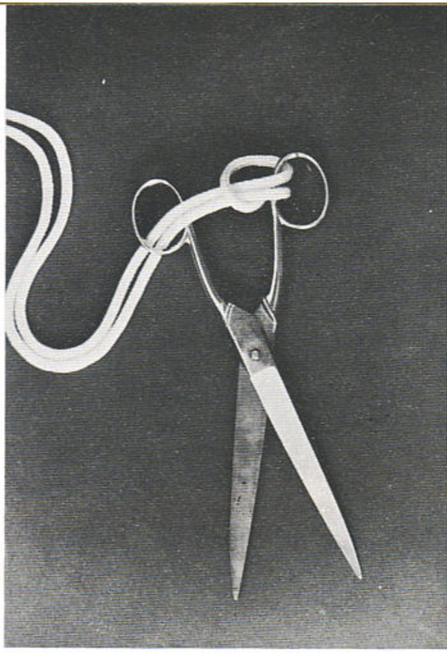


Figura 1. El problema de las tijeras.

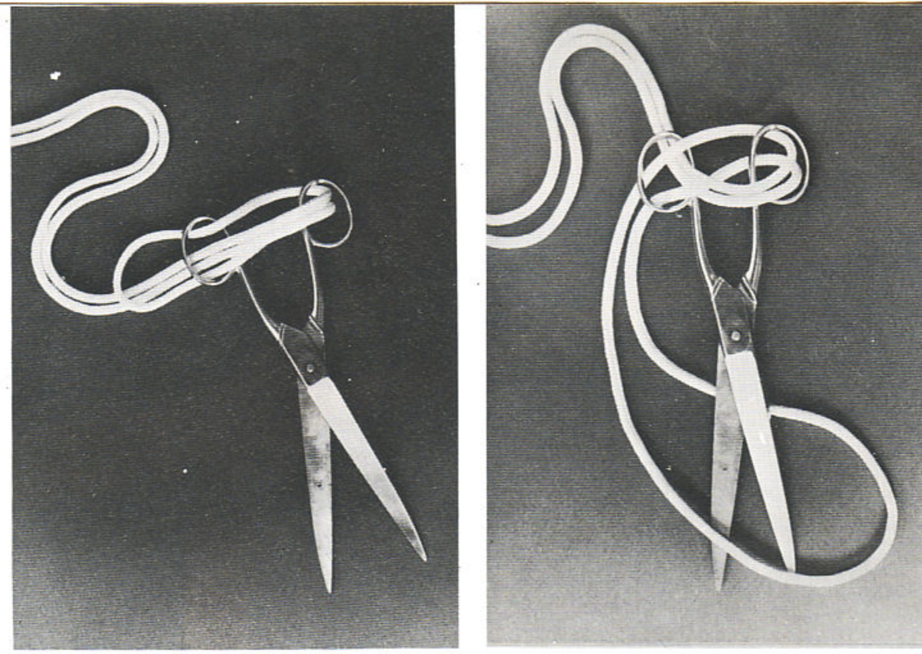


Figura 2. Solución topológica del problema (existe además otra solución llamada «alejandrina» o «gordiana»).

ticos. Combinatoria; trucos de naipes basados en propiedades numéricas; problemas geométricos y divisiones del plano y el cuadrado; y un largo etcétera aparecen en sus páginas, con ilustraciones del propio autor y explicados en un llano y encantador lenguaje. Entre los temas señalados en el libro hay unos diez o doce de raíz topológica con nudos de cuerda y pañuelos. Que yo sepa es el más antiguo tratado en el que se explican los archifamosos problemas de «nudos» de las tijeras y del preso, que desde entonces han entrado a formar parte del repertorio obligado de trucos con cuerdas.

Como puede verse en la figura n.° 1 el problema de las tijeras consiste en pasar una cinta o cuerda formando un nudo y fijar los extremos libres a un punto fijo e inamovible, tal como una pared o la Tierra.

La cuestión, claro está, radica en sacar las tijeras —¡sin usarlas como Alejandro!— del nudo formado. En la figura n.° 2 se indica el procedimiento. Haciéndolo con rapidez los espectadores no se percatan de cómo puede ser tal cosa que parece magia, ya que las tijeras se extraen de un rápido tirón. Pero lo más interesante es el hecho de que, aun haciéndolo despacio, cuesta trabajo darse cuenta —incluso al que lo ejecuta— de qué es lo que en realidad sucede.

Y es que, en verdad, el experimento de las tijeras no tiene nada de trivial. Bajo su engañosa apariencia de entretenimiento sin importancia esconde fenómenos y principios topológicos que no son sencillos y sí muy importantes. Por decirlo de alguna manera, desde el peculiar punto de vista topológico que estudia los nudos resulta que las tijeras están al mismo tiempo «dentro» y «fuera» del nudo, puesto que, en todas las fases que van desde la situación de la figura 1 a la 2, y a la extracción de las tijeras, la relación «topológica» tijeras-cuerda no se ha modificado. En otro sentido no ha habido nudo, o mejor dicho, es un «nudo impropio» o trivial.

El problema del o de los presos es conocidísimo y se ha publicado en múltiples ocasiones. Cuando son dos los presos encadenados es fácil la solución. Con tres la cosa se complica. Por nuestra parte preferimos dar en la figura n.° 3 una versión algo modificada, es un solo preso con las manos y los pies trabados como se indica. Dejamos al lector encontrar la forma de que el buen hombre pueda, al menos, ponerse de pie.

Existen una enorme variedad de trucos de «magia» o prestidigitación y juegos de todo tipo basados en las propiedades de ciertos nudos y trenzas. En el pasado siglo el gran Houdin se hizo mundialmente famoso por sus «fugas» de lugares insospechados habiéndosele atado fuertemente. Aparte unas condiciones físicas poco comunes, es claro que Houdin conocía a fondo las propiedades de los nudos. Está demostrado que conocía bien el libro de P. Minguet o alguna copia del mismo.

Muchos trucos con pañuelos, sábanas y otros materiales se basan también en las propiedades de «reducción» de muchos nudos. Por otra parte existen juegos de cuerdas y anillas que deben ser enlazadas o desenredadas según los casos, fundamentados igualmente en propiedades topológicas de nudos y trenzas. En una visita que tuve ocasión de hacer a una colección particular de objetos orientales antiguos, vi juegos indios y chinos de cuerdas y anillas verdaderamente endiablados. Actualmente existen en el mercado numerosos juegos y dis-

Figura 3. Problema del preso.

Figura 4. Nudos marineros.

positivos de este tipo. El matemático, artista, diseñador e inventor de tantos juegos, amén de poeta, el danés Piet Hein —basándose, precisamente en el «invento» de las tijeras de su amigo el premio Nobel Niels Bohr— diseñó el juego de los «Trenzoides» que es una aplicación de los nudos trenzados por tres cuerdas paralelas.

No deberíamos dejar sin mencionar un hecho muy conocido pero que frecuentemente se pasa por alto: la mayoría de los nudos significativos se conocen desde tiempo inmemorial por dos estamentos bien definidos, el mundo de la pesca y el mar, de una parte, y las señoras que hacen (o hacían) punto, ganchillo y demás labores. No es ninguna broma, muchos teoremas y principios importantes sobre estas cuestiones han tenido como fundamento inicial el examen de unos y otros nudos. El estudio de los nudos de pescadores y de marina constituye en sí mismo un juego apasionante.

TOPOLOGÍA NUDISTA

El juego de las tijeras que hemos examinado es fácil de hacer, pero difícil de explicar. Esta dificultad de explicar, y aun de entender claramente lo que vemos, es característica de los problemas y juegos con nudos, trenzas, anillas y demás implementos análogos.

Con paciencia y práctica se puede llegar a ser un experto en hacer y deshacer nudos, como los son los marineros y ciertos prestidigitadores, pero les será muy difícil dar cuenta razonada de lo que hacen. Hoy en día, el estudio de los nudos y temas afines es una teoría matemática muy complicada de naturaleza topológica, en la que se dan cita otras muchas disciplinas como Geometrías avanzadas, Combinatoria y Teoría de Grupos. En el pasado siglo ya se comenzó a estudiar la cuestión, pero ha sido en el último cuarto de siglo cuando las matemáticas y los físicos han tomado en serio el asunto. La mayor parte de los teoremas descubiertos sobre nudos y trenzas lo han sido en fechas muy recientes, y es hoy el día en que existen importantes conjeturas que no han podido ser aún probadas o refutadas. Por ejemplo, no hay todavía un procedimiento sencillo para decidir, con carácter general, si dos nudos son topológicamente idénticos. Existen procedimientos como el «polinomio de Alexander», pero dos nudos pueden ser diferentes y tener el mismo polinomio.

No es de extrañar que los problemas y juegos con nudos y trenzas sean complicados. Lo es su naturaleza y su matemática. Además, y por si fuese poco, resulta que lo que nosostros llamamos un «nudo» es el resultado de una «singularidad» del espacio tridimensional, una torsión sólo posible en nuestro espacio habitual. Es sorprendente el hecho de que en un espacio de cuatro dimensiones, no existen nudos verdaderos; todo nudo que hiciésemos con una cuerda ordinaria se desharía, convirtiéndose en un simple aro. Esta notable circunstancia hace aún más apasionante el estudio de los nudos como estructuras topológicas peculiares del espacio tridimensional, ya que con toda verosimilitud, contienen algunas de las claves fundamentales de nuestro mundo, y quizá contribuyan a explicar por qué la materia y la energía se organizan como lo hacen, o por qué la vida surge de complicadas «trenzas» de ADN en doble hélice.

Figura 5. Nudos triviales o impropios. Se reducen a una curva cerrada sin cruces.

Para dar alguna idea de las cuestiones referentes a nudos, es preciso hacer algunas definiciones. En primer lugar, hay que decir que un nudo es una curva alabeada en el espacio, aunque la representemos mediante su proyección en el plano. Un nudo puede ser «abierto» o «cerrado», según tenga extremos libres o no. En lo sucesivo nos referiremos a los nudos cerrados ya que cuanto se diga de ellos, contiene lo que puede decirse de los abiertos. Un nudo (cerrado) es una estructura topológica, lo que quiere decir que dos nudos son topológicamente iguales cuando pueden derivarse el uno del otro por manipulaciones lícitas como giros, simetría no especular, estiramiento o encogimiento. Tambien es lícito deshacer nudos impropios o triviales, pero no hacer nuevos anudamientos y mucho menos usar de procedimientos alejandrinos y de objetos cortantes para resolver nudos por muy gordianos que sean.

Un nudo es «impropio» o «trivial» cuando puede ser lícitamente manipulado y convertido en un simple aro, y en general en una curva cerrada sin cruces. En caso contrario el nudo es propio o no trivial. Es extraordinario el número de nudos que son triviales, que tras una

Figura 6. Nudos topológicamente equivalentes. Propiedades de paridad y alternancia.

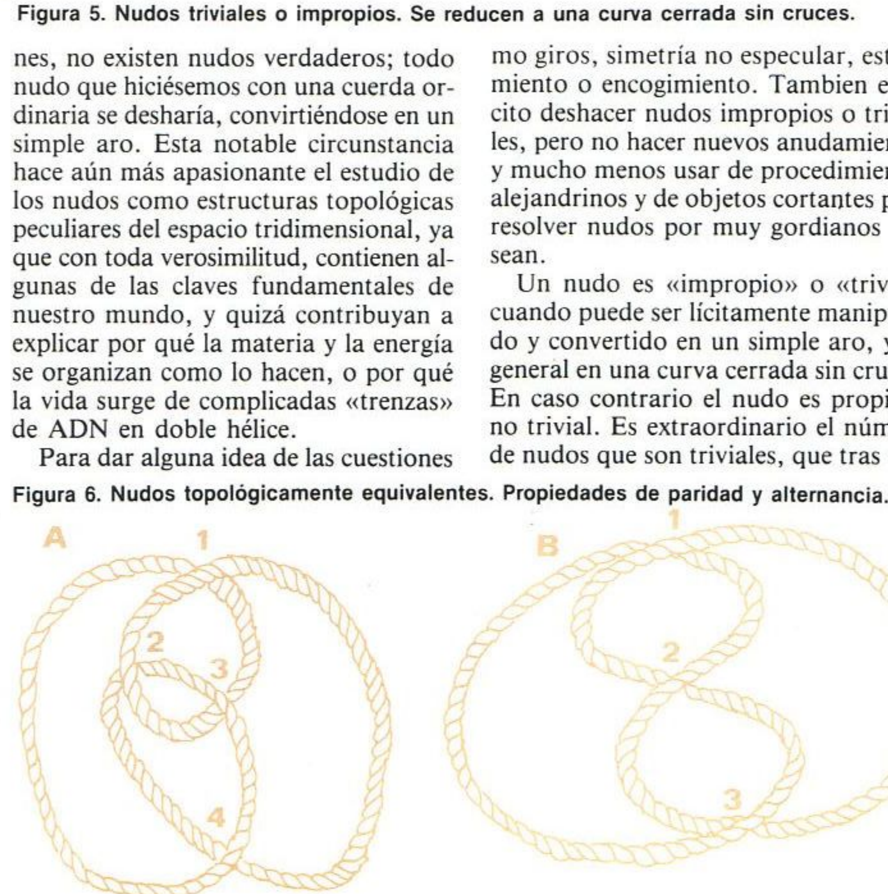


Figura 7. Uno de los más sencillos nudos auténticamente no alternante.

Figura 9. Las dos variedades levógira (I) y destrógira (D) del nudo llano o elemental. Son imágenes especulares una de otra.

aparente complejidad no son sino simples aros topológicos; los de la figura 5 son nudos triviales. Por ejemplo, si tomamos el nudo A) por dos puntos más o menos opuestos y lo estiramos se deshace. También podemos cortarlo por el punto p y tirando de los dos extremos se deshace igualmente. El nudo B) también es trivial pero con características especiales; evidentemente puede deshacerse en un simple aro y si lo cortamos por p y tiramos de los dos extremos... no se deshará en el 99 por 100 de los casos, por la resistencia y rozamiento de las cuerdas. Sí se deshará, suponiendo perfectamente lubricados y deslizantes los cabos. Es el llamado entre la gente de mar «nudo de gaza». Cortado por p y estirando uno de los dos extremos y el punto q, resulta la gaza anudada, uno de los nudos marineros más fuertes. Pero todo ello, no quita para que topológicamente sea trivial.

Los nudos A y B de la figura n.º 6 son iguales ya que por medio de estiramientos se pueden, cada uno de ellos, redisponer de la misma manera que el otro. Obviamente no son triviales y son «primos» ya que no pueden ordenarse como suma de nudos independientes (en caso contrario se denominan «compuestos»). Pero son reducibles ya que pueden modificarse en forma de nudo llano.

Los nudos de la figura n.º 6 nos servirán para ilustrar dos propiedades muy importantes de paridad y alternancia.

Consideremos el nudo A, numerando los puntos de cruce de forma arbitraria. Partiendo, por ejemplo, del punto de cruce 1 recorramos el nudo pasando por los demás cruces. El recorrido puede identificarse por la secuencia: 1 2 3 1 4 3 2 4 / 1 2 3 1 4 3... Si desde el mismo punto 1 hacemos el recorrido en sentido opuesto, la secuencia del trayecto será: 1 4 2 3 4 1 3 2 / 1 4 2 3 4... En ambos casos el trayecto completo por todo el nudo pasa obviamente dos veces por cada cruce, y por tanto cada número aparece dos veces en la secuencia. Pues bien, Gauss demostró para las curvas con puntos dobles (lo son las proyecciones de nudos en el plano) que en la secuencia de un trayecto completo el número de cada punto de cruce aparece dos veces, y siempre una vez en lugar par, y una vez en lugar impar. Es un teorema nada evidente por sí mismo y de la mayor importancia. Es inmediato ver que se cumple en las secuencias de los trayectos de la figura 6 (A), pero lo más curioso es que se cumple para toda la clase de nudos cerrados, tanto triviales como propios, primos o compuestos, y en cualquier dirección en que tracemos el trayecto. En cualquier nudo cerrado un trayecto completo tiene la propiedad invariante de que los lugares en los que aparece un punto de cruce necesariamente han de estar separados por un número par de lugares, o bien han de ser consecutivos. Esto tiene una consecuencia inmediata que es la inexistencia de nudos cuyas trayectorias no cumplan esta restricción; esto es, no toda secuencia de números en la que cada uno aparezca dos veces representa un trayecto a través de un nudo «posible». Por ejemplo, si nos dan una secuencia como: 1 2 3 2 1 4 3 2 4, podemos afirmar sin necesidad de más averiguaciones que no representa un trayecto a través de un nudo, o lo que es lo mismo, que no existe un nudo con un trayecto tal. Es una imposibilidad esencial, ontológica, un auténtico «objeto imposible» indibujable, e inimaginable. El teorema inverso no queda demostrado por la imposibilidad de su opuesto. Una secuencia de números en la que cada uno aparezca dos veces en lugares par e impar respectivamente «puede» representar un trayecto en un nudo, pero ello no quiere decir que necesariamente exista un nudo real con un trayecto así.

Otra consecuencia del teorema es que cada vez que pasemos por un nudo al volver a él, cerrando el trayecto, lo haremos a distinto nivel. Si primero lo pasamos por la rama superior, al volver lo haremos por la inferior. Esto nos introduce en la importante cuestión de los «nudos alternantes».

Figura 10. El muy marinero nudo doble o «en ocho». Es al mismo tiempo levógiro y destrógiro. (Nudo anfiquiral.)

Se dice que un nudo es «alternante» cuando al recorrerlo pasamos por los sucesivos puntos de cruce por la rama superior e inferior alternativamente; en caso contrario, el nudo es «no alternante». En la figura 6, el nudo B es alternante pero no así el nudo A. Ahora bien, ambos son en realidad el mismo nudo topológico, lo que hace pensar que todo nudo no alternante, quizá, pueda ser modificado convirtiéndolo en alternan-

Figura 8. Nudos equivalentes. No alternancia aparente (A), reducible a forma alternante (B).

Figura 11. Trenzados simples.

te. Hubo una época en la que se creyó tal cosa ya que, efectivamente, no es fácil dar con nudos auténticamente no alternantes, esto es, irreductibles a una forma alternante. Sin embargo, en 1930 se demostró su existencia (C. Bankwitz). El nudo no alternante más sencillo tiene ocho puntos de cruce y admite tres variedades muy parecidas pero irreductibles entre sí (figura n.° 7). Estos nudos ofrecen otras notables peculiaridades que no detallaremos.

En definitiva existen auténticos nudos no alternantes. No obstante son más bien raros. La mayoría de las veces que nos

Figura 12. Trenzados dobles.

tropezamos con nudos aparentemente no alternantes, suelen reducirse a una forma alternante. Por ejemplo, el nudo A de la figura n.° 8 parece no alternante ya que al pasar del punto de cruce 1 al 2 o del 4 al 6 no hay alternancia; sin embargo, puede transformarse fácilmente en la forma B que sí es alternante. Aconsejamos vivamente al lector ejercitarse en estas cuestiones provisto de una buena y flexible cuerda, ya que visualizar sobre el papel la topología de nudos es ejercicio no ya difícil sino casi arriesgado. La cuerda de persianas de algodón o lana —al decir de los más eminentes matemáticos— da excelentes resultados. Tome nota y haga caso a la ciencia.

EL OTRO LADO DEL ESPEJO

El nudo más sencillo que existe, al que los marineros, pescadores y demás gentes de mar llaman sencillamente «nudo llano», y que técnicamente recibe el pomposo nombre de trilóbulo, es el representado en la figura n.° 9. Como no dejará de observar algún agudo lector, en dicha ilustración hay en realidad dos nudos «casi» iguales. Efectivamente, el nudo llano admite dos variantes según el sentido de la torsión efectuada que da lugar al nudo levógiro (I) con giro a la izquierda, o al nudo dextrógiro (D) con torsión a la derecha. Ambas variedades son irreductibles entre sí, no hay manera de convertir uno en otro por más vueltas, giros o estiramientos que demos a la cuerda. La única posibilidad es cortar el nudo y hacerlo de la otra forma. Si iniciamos el nudo I, y antes de cerrar o empalmar los cabos hacemos a través del nudo el lazo D, la resultante es «cero», es decir, un aro, el nudo sencillamente desaparece. Los nudos I y D son imágenes especulares entre sí y sus operaciones constituyen un Grupo de simetrías. La mayor parte de las personas que no son zurdas hacen inconscientemente la variedad D. El nudo de mi corbata que creía muy interesante ha resultado ser —una vez reducido— el equivalente topológico del corriente trilóbulo D.

Los nudos que como el trilóbulo tienen la propiedad de ofrecer dos variedades con simetría especular recíproca e irreductibles entre sí, reciben el nombre de «no anfiquirales». Tienen en general, muy notables propiedades. Las dos variedades del trilóbulo dan lugar por medio de manipulaciones combinadas a otros nudos topológicamente equivalentes. Por ejemplo, las dos formas de la figura 6 no son sino transformaciones del trilóbulo levógiro (L) de la figura 9, y es fácil modificarlas para comprobarlo. Por el contrario, los nudos equivalentes de la figura n.° 8 son redisposiciones de la unión de dos nudos trilóbulos dextrógiros (D). Si unimos (hacemos sucesivamente) dos trilóbulos D e I, obtendremos figuras parecidas a las de la figura n.° 8, pero con una diferencia esencial: el nudo parecido al A ahora será alternante y el parecido al B será aparentemente no alternante.

Desde luego existen nudos anfiquirales, esto es, que por medio de manipulaciones lícitas pueden transformarse en su propia imagen especular. El de la figura n.° 10 es un buen ejemplo: mirado desde su extremo izquierdo es la imagen especular de sí mismo, vista desde el punto opuesto.

CADENAS DE NUDOS

Hay numerosos juegos basados en anillas y cuerdas, consistentes, en general, en pasar la anilla de una a otra posición, lo que no suele presentarse fácil, a no ser que se conozca el truco para ello. Como es evidente, estos juegos se basan en las propiedades topológicas de los nudos y de las cadenas o trenzas formadas por dos o más nudos. El problema del preso de la figura n.° 3 era un caso típico. Vamos a examinar ciertas curiosas propiedades de nudos enlazados, muy sencillos, que pueden ayudarnos a comprender la compleja naturaleza de los fenómenos que subyacen tras tan inocentes y honestos entretenimientos.

Un aro puede ser de madera, de alambre, de cuerda o de cualquier otro material apropiado, pero desde un punto de vista matemático un aro es un aro, esto es, una curva cerrada sin bucles ni nudos. Los eslabones de una cadena no son sino aros simples enlazados unos a otros. Dos aros simples únicamente pueden ser enlazados de una manera. Pero si a uno de los aros, antes de enlazarlo al otro, se le imprime una torsión como un «ocho», la cuestión varía notablemente como veremos.

En la figura n.° 11 (A) se representa una estructura formada por dos aros enlazados; el aro oscuro ha sido previamente torsionado en forma de «ocho dextrógiro» (la rama ascendente pasa sobre la otra de izquierda a derecha). Pues bien, la cuestión es como sigue: puede modificarse la trenza, por simple manipulación de las cuerdas sin cortarlas, de forma que los aros blanco y oscuro, intercambien sus respectivas posiciones y la torsión se transfiere del aro blanco al oscuro, conservándose el sentido del giro como puede apreciarse en B. Sin embargo, es completamente imposible que la trenza A pueda dar lugar a la estructura C que es la imagen especular de B; no existe manipulación de A que, sin cortarla, pueda originar C, ya que pertenecen a dos «mundos» incomunicables como los que existen a cada lado del espejo. Es importante darse cuenta que la transformación topológicamente invariable de A en B transfiere la torsión de un aro al otro, conservando el número de cruces (uno en este caso) y el sentido del giro. Como ambas estructuras son topológicamente equivalentes ello quiere decir, que en realidad no ha habido variación alguna en el paso de A a B; la relación topológica en el espacio tridimensional entre los dos aros se mantiene invariable. Únicamente nos percatamos de lo que ha sucedido porque pintamos de distinto color los dos aros; en otro caso ni siquiera nos hubiésemos enterado de lo ocurrido, lo que es una buena prueba de la sutileza de los fenómenos de nudos. En sentido estricto, no tiene sentido decir que en A la cuerda oscura está torsionada y que en cambio en B es al revés. Topológicamente tan torsionada está —en A y en B— la cuerda oscura respecto a la blanca como ésta respecto a aquélla. En el paso de A a B las cuerdas realmente no varían en su relación recíproca, es el espacio tridimensional circundante (en el que está el observador externo) el que ha sido topológicamente torsionado respecto a los aros enlazados. El fenómeno que vemos no es tanto una propiedad de las cuerdas, como una manifestación de las notables propiedades del espacio tridimensional. Si el juego y el observador estuviesen inmersos en el hiperespacio de cuatro dimensiones no encontraría diferencia alguna entre A y B, ni aun utilizando cuerdas de diferentes colores. Ambos casos le parecerían dos simples eslabones enlazados.

La propiedad de transferencia del número y sentido de torsiones se da en casos más complicados. En la figura n.° 12 (D) tenemos dos aros enlazados. Es una ilusión; en realidad están separados en dos aros no enlazados. Si no se lo cree hágalo con unas cuerdas y podrá comprobarlo. Pero si construimos la misma estructura con la «ligera» modificación de alterar el punto de cruce P, de forma que en este punto las ramas superior e inferior se cambien, la cosa es muy distinta; el resultado es ni más ni menos que el caso A de la figura n.° 11. Entonces la estructura trenzada D es trivial, y modificada en el punto P se transforma en una estructura de una sola torsión.

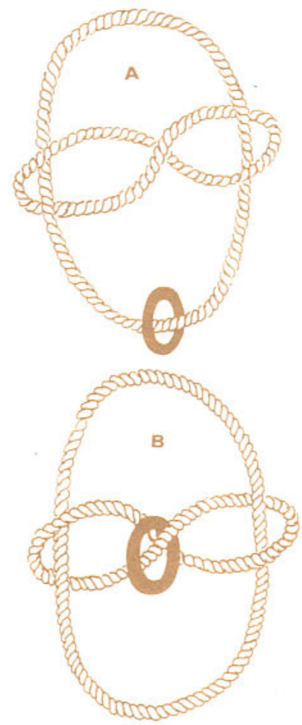


Figura 13. ¿Cómo puede llevarse la anilla negra desde la posición A a la posición B?

La estructura o lazo E, sí es una verdadera estructura con dos torsiones. Si manipulamos las cuerdas forzando a la blanca a adoptar la forma de un aro sin cruces, nos encontraremos con el trenzado F, en el que las dos torsiones aparecen en la cuerda oscura, es decir, aquélla ha transferido a ésta su torsión manteniendo el sentido del giro. A su vez F puede ser transformada en G. Las cuerdas blanca y oscura intercambian sus papeles conservándose en la transformación tanto el número de torsiones como el sentido de las mismas. Ya sabemos el significado topológico que tienen estas transformaciones y el papel que en ellas juega el espacio circundante en el que están sumergidas.

No hemos hecho sino apenas tocar el insólito mundo de los nudos y trenzas, pero creo que lo suficiente para darnos cuenta de su complejidad y de la profundidad de cuanto encierra. No es de extrañar que, como se indicó al comienzo de este artículo, los juegos de cuerdas, trenzas y anillas sean particularmente difíciles cuando no desesperantes, con soluciones generalmente inesperadas y sorprendentes. Más de una persona enfrentada a un inextrincable enredo habrá sentido una inocultable simpatía por Alejandro y su expedita resolución del nudo gordiano. Pese a ello, no dudaría en recomendar al lector se provea de unas buenas cuerdas y practique con ellas; es un juego magnífico, apasionante y ciertamente nada dispendioso, cosa muy de tenerse en cuenta en los tiempos que corren.

Planteamos dos sencillos juegos. El primero es el indicado en el figura n.° 13, se trata de llevar la anilla negra desde la posición A a la posición B. ¿Imposible? La solución la he dado a lo largo de este artículo y no creo le sea difícil encontrarla.

Dos amigos están reunidos y para distraerse deciden jugar con nudos. No son muy previsores, por lo que no tienen una cuerda a mano, así que dibujan sobre el papel las proyecciones de los nudos. El jugador X, sin que Y lo vea, dibuja un nudo cerrado sobre un papel y numera arbitrariamente del 1 al n sus puntos de cruce. Acto seguido, y sin que Y vea nada, recorre el nudo completamente desde un punto cualquiera, diciendo en voz alta los números con que se han rotulado los puntos de cruce por los que pasa. Al pasar del nudo m al z miente y en vez de decir: «.., m, z,...», dice: «..., z, m,...». Termina su recorrido. Inmediatamente Y que no ha visto nada, ni sabe cómo es el nudo, ni dónde ha empezado X a recorrerlo, afirma tajantemente: «en el paso de m a z no has dicho la verdad». ¿Cómo es posible esta seguridad?

Para terminar, un ruego y una recomendación: la próxima vez que se ate los cordones de los zapatos o se haga el nudo de la corbata, no deje de observar cómo y en qué sentido lo hace. Intente hacer dextrógiro el nudo del pie izquierdo y levógiro el del derecho, y esté seguro de que permance invariable respecto al espacio. En otro caso no se lo garantizo.