

En el mundo de los juegos ocurre a veces que la persona que los inventa se hace realmente famosa; un ejemplo puede ser el del húngaro Ernő Rubik, quien a partir de la creación de su cubo se hizo mundialmente conocido y creó de su apellido una franquicia, pues los restantes juegos basta que lleven añadido su apellido para tener asegurada la publicidad y la atención de la audiencia. En otras ocasiones un puzzle o un juego se hace muy conocido pero nadie sabe quién es su autor; un caso podría ser el juego del 15, del que existen muchas versiones, incluso en publicidad, pero que sólo los que han investigado un poco saben que lo inventó el norteamericano Sam Loyd, uno de los mayores creadores de juegos de la historia y a quien en algún momento tendremos que dedicar esta sección.

El personaje del que nos vamos a ocupar pertenece a este segundo grupo; una persona que se dedicó a las matemáticas recreativas, patentó puzzles muy atractivos e interesantes, publicó varios libros y sin embargo es poco conocido. Nos referimos en concreto al matemático británico MacMahon (1854–1929). En esta sección ya nos hemos referido a él en la revista *SUMA* nº 41, pero queremos dedicar este artículo a estudiar los puzzles que descubrió y patentó, así como posibles versiones que surgen de ellos.

MacMahon, ese hombre

Percy Alexander MacMahon o McMahon, nació el 26 de septiembre de 1854 en Aliena, Malta. Hijo de militar, fue educado en una escuela de Cheltenham para seguir los pasos de su padre en el ejército británico.



Estuvo destinado en la India durante cinco años, hasta que una enfermedad desconocida le devolvió a Inglaterra, librándose de la guerra con los afganos y por lances del destino paso de soldado a ser elevado al rango de capitán y nombrado instructor de Matemáticas en la Real Academia Militar. En 1891 fue nombrado Instructor Militar en Electricidad en la Real Academia Militar en Woolwich. Se retiró de la carrera militar en 1898.

Grupo Alquiler de Sevilla

Constituido por:

Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*

José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*

Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*

juegos@revistasuma.es

Fue elegido miembro de la *Royal Society* en 1890, que le concedió la Medalla Real en 1900. Recibió la Medalla Silvester en 1919 y la *London Mathematical Society*, de la que fue presidente entre 1894 y 1896, le concedió la Medalla Morgan en 1923.

Como matemático estudió sobre todo las funciones simétricas y las particiones y recubrimientos del plano. También fue un apasionado de la combinatoria. Publicó dos libros sobre matemáticas recreativas:

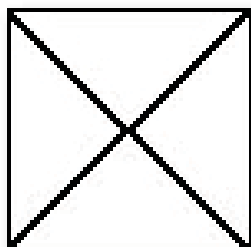
- *Combinatory Analysis (1915-1916)* (Análisis combinatorio). Este libro en dos volúmenes es considerado el primer libro importante sobre combinatoria numérica.
- *New Mathematical Pastimes (1921)* (Nuevos pasatiempos matemáticos). En este segundo libro reúne todos sus trabajos en matemáticas recreativas. En él pone de manifiesto una de las investigaciones que más le intrigó: la construcción de patrones que se puedan repetir y que llenen el plano.

Además patentó en 1892 un par de puzzles, junto con el Mayor J. R. Jocelyn, basados en la combinatoria sobre los que va a versar nuestra entrega de hoy.

Primer puzzle: cuadrado dividido en cuatro partes

En esta sección ya hemos trabajado anteriormente el tema de las variaciones coloristas para estudiar patrones y puzzles. Aparte del artículo ya nombrado, en el nº 53 de *SUMA* publicamos el trabajo "Combinatoria de colores". En ese artículo comenzábamos proponiendo la división de un cuadrado en cuatro piezas iguales, tomando dos de esas divisiones para presentar puzzles.

En una de esas divisiones, como vemos en la figura, se basó MacMahon para el primer puzzle que presentamos.



Su planteamiento fue estudiar cuántas piezas distintas se pueden formar utilizando tres colores que puedan repetirse las veces que sean necesarias.

Así surgió el que conocemos como puzzle de 24 cuadrados y 3 colores. En la imagen 1 podemos observar todas las piezas que salen con esa condición.

Con esas 24 piezas MacMahon planteó el siguiente problema:

1. Los lados de las piezas en contacto deben ser del mismo color.
2. Todo el perímetro del rectángulo debe ser del mismo color.

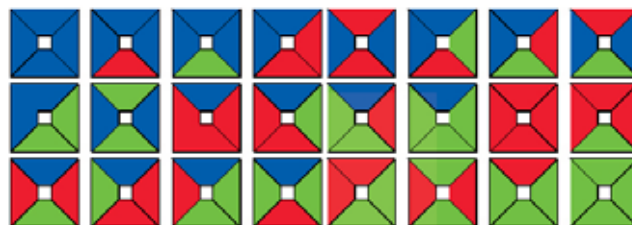


Imagen 1

En la figura siguiente podemos ver una solución a este problema.

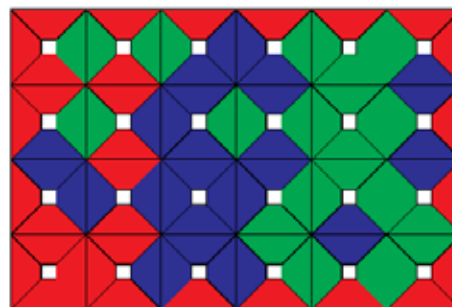


Imagen 2

Siempre que trabajamos un material nuevo y mientras conseguimos encontrar la solución (lo que a veces se nos resiste, hasta que llega el "fiera" que nos la "destripa" en un momento) nos gusta rentabilizar ese material, que la mayoría de las veces hemos tenido que construir, buscando qué otros retos podemos plantear. Por eso, trabajando en el taller con nuestros alumnos han surgido las siguientes actividades en las que se utilizan todas o algunas piezas, manteniendo la única restricción de que dos piezas que se toquen deben de hacerlo uniendo el mismo color.

1. Coger las nueve piezas que tienen tres colores y construir un cuadrado de lado 3.
2. Coger las doce piezas que tienen sólo dos colores y construir un rectángulo de 3x4.
3. Coger las doce piezas complementarias de las anteriores, es decir las que tienen uno o tres colores, y construir un rectángulo de 3x4.
4. Coger las 15 piezas que tienen uno o dos colores y formar un rectángulo de 3x5.
5. Coger las 15 piezas que tienen uno o dos colores y otra pieza (la que quieras) de las que tienen tres colores, y con ellas construir un cuadrado de 4x4.
6. Dividiendo las piezas en dos grupos de 12 piezas cada uno construir dos rectángulos de 3x4 (imagen 3).



Imagen 3

7. Con todas las piezas, construir rectángulos de 2×12 , 3×8 y 6×4 .
8. Con todas las piezas construir rectángulos huecos de 3×11 , 4×10 , 5×9 , 6×8 y 7×7 .

A continuación podemos ver ejemplos de rectángulos de 6×4 y 3×8 . En ellos no se impone la condición de que el perímetro exterior sea del mismo color. Es más, creemos que sólo es posible mantener la segunda restricción de MacMahon en los rectángulos de orden 6×4 . Siguen dos imágenes de rectángulos huecos.



Imagen 4



Imagen 5



Imagen 6

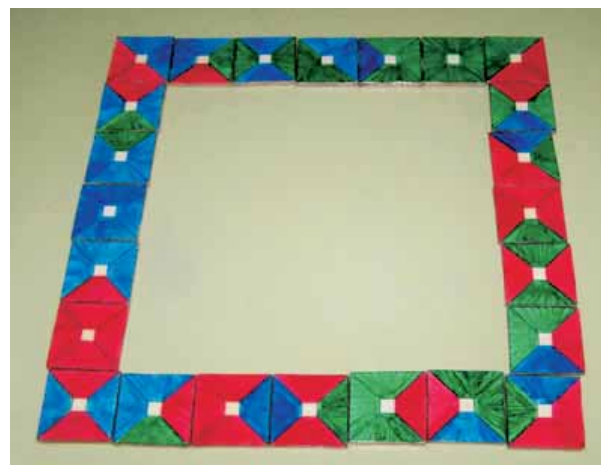


Imagen 7

Este puzzle puede encontrarse comercializado entre los materiales de una empresa granadina de nombre Materiales Didácticos Bemal S.L., dentro de sus puzzles 2D. Se puede encontrar más información en www.bemal.es.

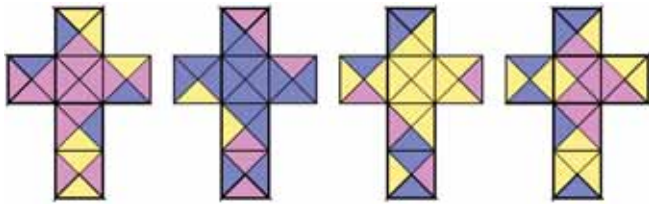
MacMahon fue una persona que se dedicó a las matemáticas recreativas, patentó puzzles muy atractivos e interesantes, publicó varios libros y sin embargo es poco conocido.

El salto del plano al espacio. Como resolver un reto.

Para mostrar que no somos los únicos que aprovechamos un juego para sacar variantes de él, vamos a presentar el puzzle que conocemos como de los 4 cubos y 3 colores.

Este puzzle fue creado por Scout Nelson y según reza la publicidad de la casa que lo comercializa, después de 50 años y muchos intentos, un niño de 9 años consiguió resolverlo, colocando los 24 cuadrados de MacMahon en las 24 caras de cuatro cubos de manera que en los bordes de las caras coincida el color, es decir, las aristas de cada cubo unen dos triángulos del mismo color.

La distribución de colores en los cubos es la que podemos ver en el siguiente desarrollo.



Con los cuatro cubos resultantes se tiene un puzzle realmente llamativo y nada fácil.

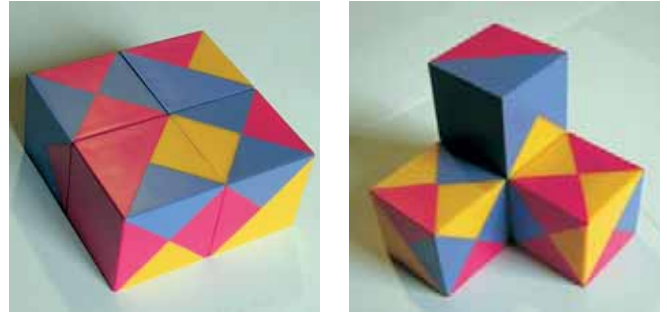
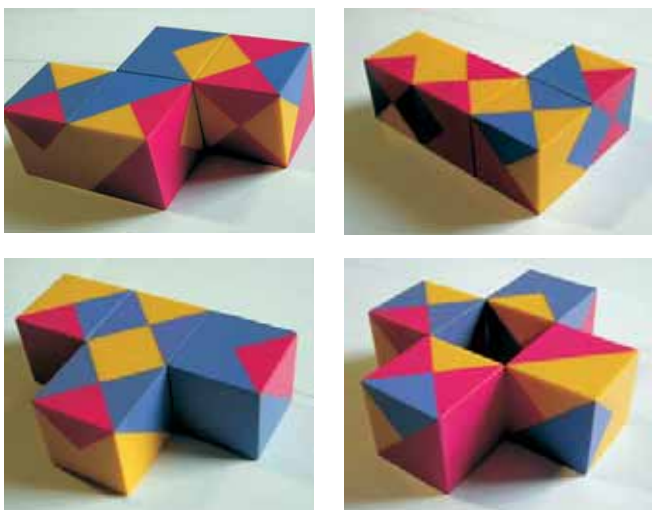
El reto consiste en apilar los cuatro cubos de manera que las caras que quedan visibles a cada lado se unan por colores iguales.

Como es un puzzle altamente difícil, de entrada comenzamos apilando primero dos y después tres, antes de pasar al problema completo del que podemos ver una solución en la imagen adjunta. Sólo decir que no es trivial conseguir apilar los cubos incluso viendo la solución.



Como hemos comentado en el puzzle anterior, una vez que hemos resuelto el problema planteado llega el momento de sacarle más rendimiento y por ello invitamos a conseguir figuras con los cuatro cubos, manteniendo siempre la restricción de que las caras se unan por colores iguales.

Añadimos algunas de las soluciones encontradas por nuestros alumnos.

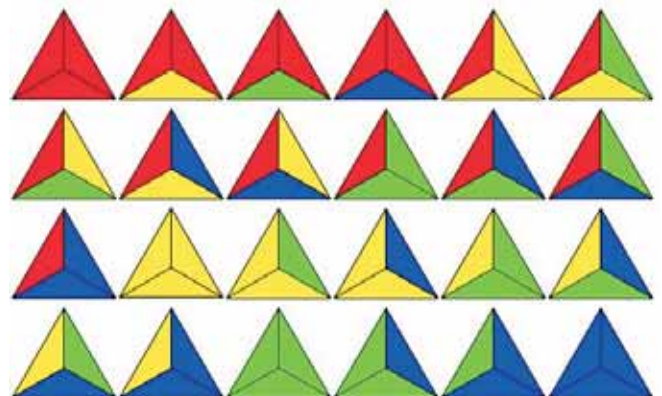


Segundo puzzle de MacMahon: triángulos divididos en 3 partes.

La misma idea que vertió en su puzzle de los 24 cuadrados con tres colores lo hizo MacMahon en su segundo puzzle, pero en este caso partiendo de un triángulo. En la misma patente se describe que el puzzle está formado por piezas que son triángulos equiláteros divididos en tres partes que llevan números o color de modo análogo al dominó.

Es decir, en este puzzle se basan también los dominós triangulares que pueden encontrarse formado por piezas triangulares y con las que puede jugarse a una versión del dominó clásico.

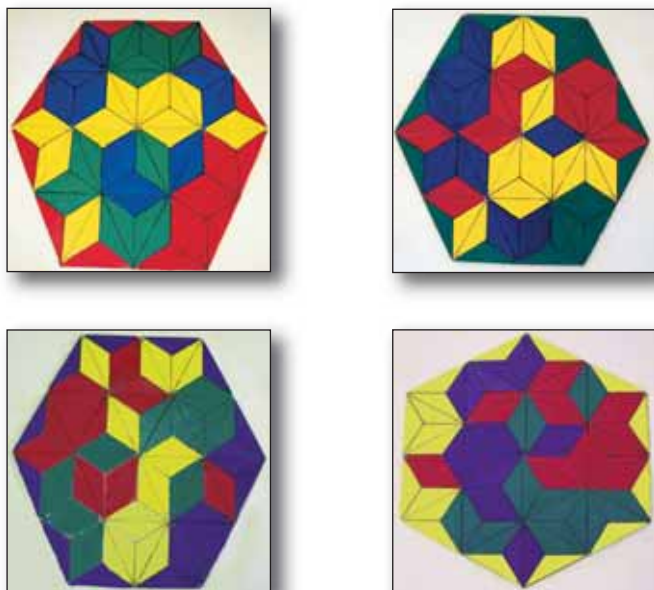
Para que no sea muy simple, ahora se utilizan cuatro colores y el puzzle está formado por todas las piezas distintas formadas por triángulos divididos en tres partes iguales y que puedan colorearse con cuatro colores diferentes, pudiéndose repetir los colores obviamente. Las piezas posibles aparecen en la siguiente imagen.



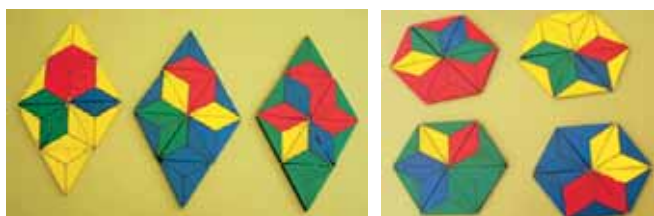
En su libro *Nuevos pasatiempos matemáticos*, aparte de describir el juego plantea un nuevo reto, como hizo con los cuadrados: construir un hexágono de lado doble que los de los triángulos, con las siguientes condiciones:

1. Los lados que se toquen deben ser del mismo color.
2. El perímetro del hexágono debe ser de un solo color.

En las fotografías siguientes tenemos algunas soluciones en donde el borde es de cada uno de los colores posibles.

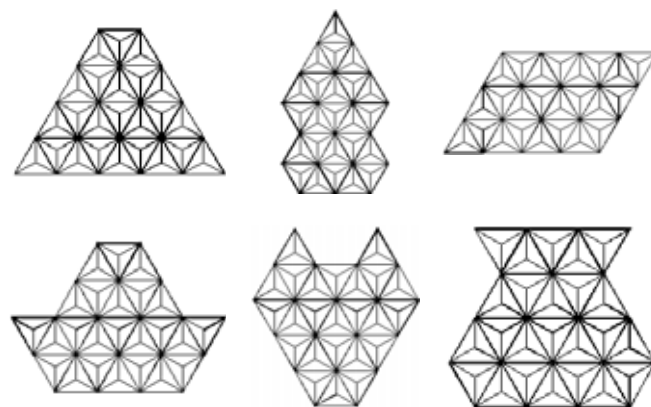


Una vez resuelto el problema de MacMahon vamos a ponernos retos. Por ejemplo, construir un rombo de lado 2 con el borde de un color, con las piezas restantes montar otro rombo con el borde de otro color y, si me quedan fuerzas, conseguir con las restantes otro rombo de las mismas características. Para que no se nos llame mentirosos mostramos en la siguiente fotografía una solución a esta propuesta.



Otro rompecabezas es conseguir cuatro hexágonos de lado igual al triángulo, pero cada uno con un borde de cada uno los cuatro colores que se han usado en el puzzle. También se muestra una solución.

Jugando con todas las piezas, aparte del hexágono propuesto por MacMahon, es posible conseguir otras figuras que guardan una cierta simetría o forman polígonos reconocibles. A continuación os planteamos como reto algunas composiciones que han conseguido nuestros alumnos en el taller de juegos.



En la siguiente página web podemos jugar online con los triángulos de MacMahon y otros puzzles similares:

<http://www.gamepuzzles.com/pparlor/hexmojr.html>

Existe un juego holandés con el nombre Spectrangle, comercializado en nuestro país por Borrás, que se basa en este puzzle.



Este juego sin embargo es de estrategia, trabaja con cinco colores en lugar de cuatro y como las piezas son macizas y se pueden usar por delante y por detrás, el número de posibilidades se repiten.

En concreto, las piezas formadas por tres colores diferentes se reducen a la mitad, por eso sólo tenemos 20 piezas utilizando cuatro colores diferentes.

Actualmente la Sociedad Andaluza Thales tiene comercializados una serie de materiales y juegos entre los que se encuentra el puzzle concreto de MacMahon con el nombre

“24 triángulos de colores”, si alguien está interesado en informarse sobre el tema puede consultar la dirección:

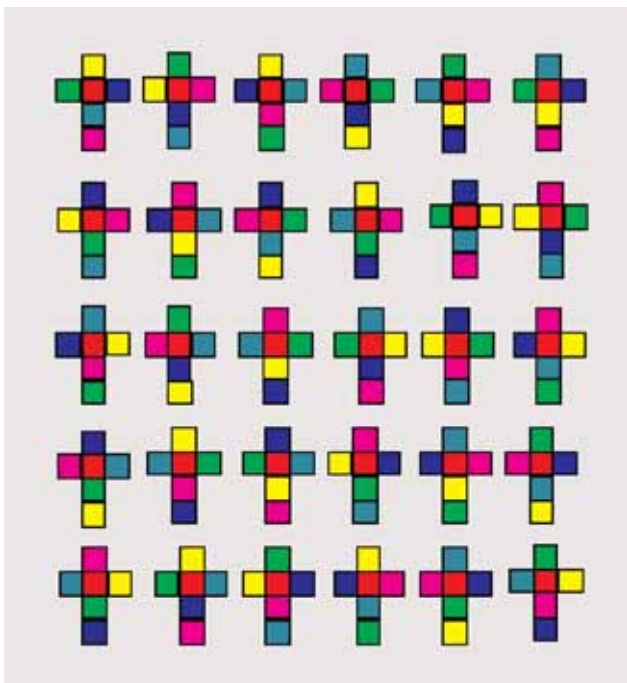
<http://thales.cica.es/?q=node/268>.

El puzzle espacial de MacMahon.

También en 1892, MacMahon presentó la patente de un conjunto de 30 cubos con sus caras pintadas con seis colores diferentes, que es conocido como el **puzzle de los 30 cubos y los 6 colores**.

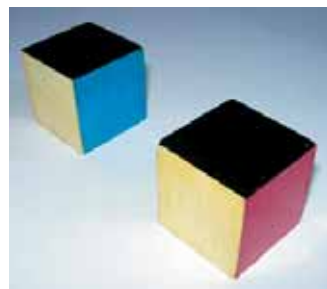
Consiste en todos los cubos posibles que se pueden formar pintando cada cara de un color diferente. El estudio combinatorio de todas las posibilidades ya es un buen proyecto para el taller de matemáticas. La primera dificultad está en elegir una buena notación para que no se nos pase ninguna posibilidad. En la imagen adjunta tenemos los 30 cubos posibles: como puede verse, hemos colocado todos los desarrollos a partir de una cara fija, la roja, y combinando todos los demás colores.

Nosotros no hemos conseguido encontrar este puzzle comercializado, y para construirlo hemos decidido ir al reciclaje para optimizar los recursos y las fuerzas. Lo mejor es conseguir cubos de madera o de plástico proveniente de juegos infantiles ya desechados, aunque es difícil conseguir 30 del mismo tamaño (siempre podemos echar mano de los mercadillos de segunda mano). Por último, usando papel adhesivo del que se utiliza para forrar los estantes de las cocinas o para trabajos manuales, basta recortar cuadrados más pequeños que la cara del cubo y ¡a pegaaaar!



Con los cubos construidos os proponemos unos cuantos desafíos de distinto grado de dificultad, en la mayoría de ellos hay que seleccionar los cubos que necesitaremos para resolverlos:

1. Coger un cubo cualquiera y buscar su simétrico.
2. Coger 6 cubos y formar con ellos una columna de manera que cada uno de los lados contenga los seis colores distintos.
3. Coger 8 cubos y formar un cubo de $2 \times 2 \times 2$ que tenga en las caras derecha e izquierda un color, delante y detrás otro color y un tercer color arriba y abajo.
4. Construir un cubo de $2 \times 2 \times 2$ con un color en dos caras opuestas y colores diferentes en las otras caras.
5. Construir un cubo de $2 \times 2 \times 2$ con un color diferente en cada una de sus caras.



Reto 1



Reto 5

6. Construir un cubo de $2 \times 2 \times 2$ de forma que las caras delantera y trasera sean de un solo color y el mismo, en las caras laterales también se obtenga el mismo color, diferente del anterior y en la parte de arriba y de abajo aparezcan los otros cuatro colores sin repetir en cada cara.
7. Construir un cubo de $2 \times 2 \times 2$ con cuatro colores diferentes en una cara, y que esos mismos cuatro colores se repitan en todas las caras.
8. Construir un cubo de $3 \times 3 \times 3$ de manera que cada cara sea de un color diferente.

Para mostrar que podemos engarzar una actividad con los resultados de otra proponemos la siguiente en la que en cada estado, al tener menos cubos, se complica el reto.

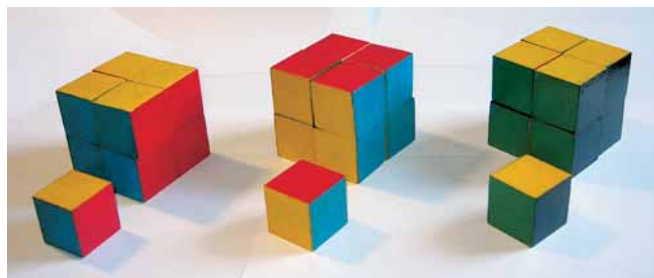
Coger un cubo cualquiera. De entre los 29 restantes tomar 8 cubos que formen un cubo de $2 \times 2 \times 2$ y que sus colores tengan la misma disposición que el elegido.

Este juego puede tener dos niveles de dificultad:

- a. Que las caras en contacto tengan distinto color.
- b. Que las caras en contacto tengan el mismo color.

De entre los 21 cubos que quedan se puede coger un nuevo cubo y de entre los 20 restantes coger 8 y formar un cubo de $2 \times 2 \times 2$ con los colores de este último cubo.

De entre los 12 que quedan se puede coger un nuevo cubo y de entre los 11 restantes coger 8 y formar un cubo de $2 \times 2 \times 2$ con los colores de este último cubo.



Reto 8

Como convertir un puzzle en un juego de estrategia: torre de colores

En su libro *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Martin Gardner incluye un artículo de título “Los 24 cuadrados y los

30 cubos de colores” donde habla de estos puzzles y nos propone un juego para dos jugadores, con las siguientes reglas:

- Se colocan los 30 cubos en una caja o bolsa donde no puedan verse sus colores.
- Cada jugador saca 7 cubos ocultándolos a su oponente.
- Para comenzar turno cada jugador dice tres colores, se tira uno de los cubos del juego cualquiera y el que hubiese elegido el color de la cara superior comienza el juego.
- El primer jugador coloca uno de sus cubos en el centro de la mesa. El segundo jugador coloca al lado un cubo de los suyos de manera que las caras que queden en contacto sean del mismo color. Por turno los jugadores van colocando sus cubos formando una torre de base cuadrada de 2×2 cubos. Una vez conseguida se continúa construyendo sobre ella otro piso de 2×2 cubos.
- Para comenzar un piso nuevo debe estar terminado el precedente.
- Se puede colocar un cubo en cualquier hueco de un piso manteniendo siempre la obligación de que las caras que se toquen deben ser del mismo color.
- Si un jugador no puede colocar ninguno de sus cubos, debe robar de la bolsa de cubos. Si el cubo extraído se puede colocar, puede jugarlo si quiere. Si no puede o no quiere pasa su turno.
- Si algún jugador por estrategia desea pasar turno, puede hacerlo, pero debe robar un cubo de la bolsa.
- Gana el jugador que coloca todos sus cubos en la torre. Si en algún momento el juego llegara a bloquearse y no se pudiera continuar, ganaría el que tenga menos cubos en su poder.

JUEGOS ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gardner, M. (1991): *Nuevos pasatiempos matemáticos*. Colección El libro de bolsillo, n° 391. Madrid: Alianza Editorial.
 Grupo Alquerque (2002): El puzzle de los cubos de colores, *Suma*, (41), pp. 121-123.

Grupo Alquerque (2006): Combinatoria de colores, *Suma*, (53), pp. 61-64.